

Creencias de estudiantes de secundaria, el pensamiento intuitivo y analítico en problemas con números racionales

Lorena Jiménez Sandoval¹ y Ofelia Montelongo Aguilar²

RESUMEN

En este estudio exploramos las creencias de once estudiantes de secundaria para entender su presencia en el pensamiento matemático. Elegimos problemas con números racionales, en los que el llamado sesgo del número natural ha documentado como una tendencia a responderlos empleando el conocimiento sobre números naturales llevándolos a dar respuestas incorrectas. Esto nos permitió distinguir entre el pensamiento intuitivo y el pensamiento analítico empleando la teoría del doble proceso para identificar si las creencias son diferentes en el empleo de uno u otro tipo de pensamiento. Diseñamos y aplicamos una escala de Likert para conocer el sistema de creencias, un cuestionario de opción múltiple sobre productos entre números racionales y naturales y comparación de fracciones, además de sumas y productos con números racionales. Encontramos que el pensamiento analítico estuvo presente en el 69% de los estudiantes y que las creencias ante esta ocurrencia son mayoritariamente positivas para con la matemática, junto con un alto sentido de autoeficacia.

PALABRAS CLAVE

Pensamiento analítico, Pensamiento intuitivo, Sistema de creencias, Números racionales, Nivel secundaria.

¹ lorenajimenez@uaz.edu.mx
Universidad Autónoma de Zacatecas
<https://orcid.org/0000-0002-1669-7178>

² omaguilar_m@hotmail.com
Universidad Autónoma de Zacatecas
<https://orcid.org/0000-0001-5340-2140>

Jiménez-Sandoval, L., & Montelongo-Aguilar, O. (2023). Creencias de estudiantes de secundaria, el pensamiento intuitivo y analítico en problemas con números racionales. En A. Castañeda, (Ed.), *Aportes y recursos para la innovación en la educación matemática* (pp. 147–170). SOMIDEM Editorial. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S1/2023/01-06>

ANTECEDENTES

Algunas investigaciones en torno a la enseñanza y aprendizaje de la matemática (Schoenfeld, 1992; Gómez-Chacon, et al., 2011; López et al., 2012; y Gómez-Chacon, et al., 2014,) buscan aportar elementos que permitan entender cómo es la interacción entre los aspectos cognitivos y afectivos cuando se construye conocimiento matemático, considerando que se ha demostrado desde diferentes perspectivas teóricas y que ambos están presentes en los procesos de aprendizaje, particularmente cuando se resuelven problemas de matemáticas.

El dominio afectivo ha ganado mayor atención en los últimos años, no solo porque permite entender los procesos de aprendizaje, sino también la forma en la que enfrentamos las dificultades en la vida cotidiana. Las aproximaciones teóricas al respecto han surgido desde diferentes áreas del conocimiento, Leron y Hazzan (2006) muestran cómo los aportes de algunas investigaciones hechas desde la psicología cognitiva en la última década del siglo XX y la primera del XXI, pueden ayudar a interpretar resultados obtenidos en este mismo sentido en educación matemática.

Schoenfeld (1992) explicaba que a través del tiempo se han declarado múltiples condiciones necesarias para el desarrollo del pensamiento matemático, pero la suficiencia de estas no ha convencido a los estudiosos de los campos de la psicología cognitiva ni de la matemática educativa. Según este autor, la comprensión de la importancia de la metacognición, considerada como integrada al dominio afectivo en el desarrollo del pensamiento matemático, se alcanzó a mediados y finales de la década de los 80's con las aportaciones de Flavell, y fue el concepto de creencias el que produjo un acercamiento entre las investigaciones cognitivas y afectivas. La progresión de las ideas y metodologías en ambos campos siguió más o menos la misma dirección, revelando la existencia de relaciones estadísticas entre el logro matemático y la autorregulación de aprendizaje, que es considerada como la articuladora de la dimensión cognitiva y motivacional en la construcción del conocimiento matemático.

Por su lado, López et al. (2012) explican que, aunque “la planeación organizada de tareas con miras al logro de una meta es fundamental para el aprendizaje de las matemáticas” (p. 41), esta no es suficiente, ya que, según estos autores, se requiere de la metacognición, que como una reflexión consciente ejercida sobre el proceso de solución de un problema conduce a un aprendizaje significativo; y que es la capacidad de análisis la que se asocia con un razonamiento matemático eficaz.

Según Leron y Hazzan (2006), en educación matemática se hace una división del nivel superior de pensamiento en cognición y metacognición, y es de esta última de la que las creencias forman parte. Estos autores aseguran que gran parte de la investigación en esta área se ocupa, explícita o implíci-

tamente, de la relación entre los modos intuitivo y analítico del pensamiento y comportamiento matemático. Kahneman (2003) establece una similitud entre la función de la intuición y el etiquetado como Sistema S1 por Stanovich y West (2000), considerando que ambos —la intuición y S1— se caracterizan por su inmediatez, alta accesibilidad, automaticidad y sencillez, se consideran sumamente útiles y confiables en condiciones normales de la vida diaria, pero están expuestos a errores en condiciones más complejas y abstractas. La intuición es opuesta al pensamiento analítico, el cual se caracteriza por ser lento y reflexivo, y que exige mayor atención y tiempo de análisis; se ubica en el ámbito de la cognición, aunque comparte con la metacognición la parte del autocontrol que contiene una funcionalidad adicional, entre las que se encuentran las creencias. Este sistema fue etiquetado por el mismo Stanovich y West (2000) como Sistema S2.

De acuerdo a Vamvakoussin, et al. (2012), la intuición esta mediada por herramientas de representación cultural, y es claro que está presente cuando se resuelven problemas de matemáticas. Estos autores consideran que existe un estado intermedio del conocimiento que crea un puente entre la perspectiva inicial de los estudiantes sobre los conceptos matemáticos y la perspectiva científica prevista que aún no está disponible para ellos, misma que se conforma de varios antecedentes, suposiciones y creencias sobre el comportamiento de los entes matemáticos en cuestión. Particularmente refieren, por ejemplo, que antes de que los estudiantes se instruyan sobre números racionales, ellos ya han conformado creencias sobre cómo estos números se comportan, y recurren en gran medida a su comprensión inicial sobre números naturales. En su estudio dan cuenta del proceso de transición entre un estado de comprensión inicial que los estudiantes tienen sobre números racionales, y un estado de comprensión más sofisticado en el que están presentes conceptos que se pueden considerar contra-intuitivos.

Autores como Vamvakoussi, et al. (2012) y Van Hoof, et al. (2013), coinciden con la idea de que, es a partir de múltiples experiencias con los números naturales, e incluso a partir de algunas de carácter físico con materiales manipulables, que los estudiantes conforman creencias sobre qué son los números racionales y cómo deben comportarse.

Gómez-Chacón et al. (2014) discuten en torno a las variables presentes en la interacción de procesos intuitivos que se consideran inconscientes, implícitos y que se trabajan —algo así como lo que en el lenguaje común suele llamarse segundo plano—, y los procesos de pensamiento analíticos que se ponen en juego de manera consciente y explícita cuando se intenta dar respuestas a problemas que incluyen características presentes en problemas matemáticos como la abstracción, un lenguaje estrictamente simbólico, identificación de aspectos comunes para proyectar una generalización, entre otros. En su estudio centran la atención en la autorregulación metacog-

nitiva y de control, y en las creencias de los estudiantes sobre las matemáticas y su aprendizaje, ya que las consideran predictoras del logro matemático. Estos autores reportan haber encontrado una correlación positiva entre las citadas variables y el logro matemático. Asumen la teoría del doble proceso que aporta la psicología educativa, y ubican la investigación en una línea que considera la presencia de un tercer sistema en el que juegan cuatro elementos de manera importante: las creencias de los estudiantes como un nivel metacognitivo que dota de un contexto a su actuación, la reflexión cognitiva a manera de regulación metacognitiva que está presente en la inhibición de respuestas intuitivas frente a las analíticas, los procesos y límites de la memoria, considerada como centro en el almacenamiento de la información, y las habilidades deductivas.

En este artículo se aportan elementos para entender las creencias presentes en un grupo de estudiantes de secundaria cuando aplican la intuición o dan paso al pensamiento analítico para resolver problemas con números racionales.

PROPÓSITO

La mayoría de los estudiantes tienen la creencia de que el tiempo que tardan en resolver un problema de matemáticas es representativo de la inteligencia que poseen, de tal forma que buscan dar respuestas más o menos rápidas a los problemas, obviando, muchas veces de manera consciente, un análisis detallado de las condiciones del problema; incluso es común que no se detengan demasiado tiempo para comprender qué es exactamente lo que deben resolver antes de emprender una estrategia de solución. Schoenfeld (1992) atribuye esta cuestión a al menos doce años de experiencia escolar sobre la solución de problemas de matemáticas, tiempo durante el cual se conforman creencias y se desarrolla cierto nivel de intuición.

De acuerdo con López (2006), la intuición ha sido investigada en relación con diversas temáticas, tales como “la resolución de problemas, imágenes, modelos, creencias y estadios de desarrollo de la inteligencia” (p. 29); comúnmente se considera que la intuición se asocia al sentido común y que puede “crear la apariencia de certeza” (p.29). Sin embargo, el proceso de representación intuitiva puede producir “una representación distorsionada de la realidad original y las predicciones pueden ser total o parcialmente incorrectas, por eso la intuición se considera como una fuente potencial de error” (p. 29). Aún cuando la intuición representa “una guía invaluable para la construcción de conocimiento” (p. 35), y ejerce “un efecto coercitivo sobre las vías de razonamiento” (p. 31), es difícilmente erradicable y generalmente se opone al razonamiento analítico. Según esta autora, aunque existen afirmaciones cuya verdad puede ser admitida intuitivamente “sin sentir necesidad alguna de una prueba formal o empírica” (p. 30), en matemáticas,

las analogías intuitivas son benéficas cuando “después de ser aceptadas pueden ser justificadas lógicamente” (p. 35).

Fischbein, 1987 (citado en Leron y Hazzan, 2006) explica que:

El problema principal es aprender a vivir con la carga intuitiva de conceptos, necesaria para la fluidez productiva del razonamiento, y, al mismo tiempo, controlar el impacto del curso mismo del razonamiento de estas influencias intuitivas. Para ello, el alumno debe aprender a tomar conciencia del significado formal y exacto y de las implicaciones de los conceptos matemáticos, por un lado, y de las intuiciones subyacentes, por otro. (p. 207).

En este sentido, se asume que cuando se resuelven problemas de matemáticas está presente la intuición, pero las respuestas que se dan no deberían obedecer exclusivamente al pensamiento intuitivo. De acuerdo Attridge y Inglis (2014), las matemáticas suelen requerir de la inhibición de la intuición para abrir la posibilidad de la aplicación de nuevas habilidades, conocimientos y fórmulas que exigen un pensamiento más analítico. Según estos autores, las teorías del doble proceso que se han desarrollado en áreas de la psicología cognitiva han sido aplicadas recientemente al pensamiento matemático, y proponen la diferenciación de al menos dos tipos de razonamiento que se ponen en juego cuando se resuelven problemas. Estos razonamientos pueden entrar en conflicto y sobreponerse uno al otro, dando respuestas incorrectas a problemas específicos.

La solución dada a problemas con números racionales permite distinguir la presencia del pensamiento intuitivo y analítico en la resolución de problemas. Se ha documentado una tendencia a responder problemas que involucran números racionales con el conocimiento que se tiene sobre ellos; esta tendencia se considera intuitiva y fue llamada por Ni y Zhou (2005, citado por Vamvakoussi, et al., 2012) como sesgo del número natural. Estudios como los de Vamvakoussi, et al. (2012) y Van Hoof, et al. (2013), han hecho evidente su presencia en estudiantes de todos los niveles educativos, incluyendo los de la edad adulta, cuando resuelven problemas de matemáticas. Esta es una de las razones por la que elegimos proponer en nuestra investigación la solución de problemas con números racionales en un grupo de estudiantes de secundaria. Se pretendía hacer evidente la presencia y diferenciar el pensamiento intuitivo del analítico, así como identificar las creencias existentes cuando estos dos tipos de pensamiento ocurren en la búsqueda de una su solución.

REFERENTES TEÓRICOS

De acuerdo con Attridge y Inglis (2014), la teoría del doble proceso podría mejorar la comprensión que se ha desarrollado sobre el pensamiento matemático y sus características, las cuales no solo están presentes cuando se resuelven problemas de matemáticas, sino en cualquier tipo de problema en lo cotidiano. Asumimos la postura de Leron y Hazzan (2006) en cuanto a

no profundizar en los matices de las diferentes teorías de procesos duales que se han desarrollado en la psicología cognitiva; y considerar la que Stanovich y West (2000) llaman visión prototipo (según traducción nuestra), que distingue dos tipos de razonamiento cuyas características se han expresado de manera más sistematizada en estudios posteriores.

Leron y Hazzan (2009) establecen que en nuestra cognición y comportamiento están presentes dos modos de pensamiento: el pensamiento analítico o sistema S2, y el pensamiento intuitivo o sistema S1. Ambos tipos de pensamiento difieren en la dimensión de accesibilidad. Estos autores explican que muchos de los errores que cometen los estudiantes cuando resuelven problemas de matemáticas se deben a que las soluciones exigen la aplicación de reglas que pueden ir en contra de su inteligencia natural o intuitiva. La función del sistema S1 es dar respuestas inmediatas altamente accesibles, automáticas y sencillas. S1 se considera sumamente útil y confiable en condiciones normales de la vida diaria, pero propenso a errores en condiciones más complejas y abstractas. Los errores en la solución de problemas generalmente son el resultado de un pensamiento intuitivo no controlado, pero también pueden originarse en un procesamiento analítico erróneo luego de que S2 anula la respuesta dada por S1, provocando que finalmente se emita una respuesta incorrecta (Van Hoof, et al. 2013).

El sesgo del número natural se atribuye a un pensamiento intuitivo no controlado que ocurre frente a la aplicación errónea del conocimiento que se tiene sobre los números naturales en la solución de problemas con números racionales. Las investigaciones antes citadas han empleado instrumentos que permiten identificar la presencia de ambos sistemas, S1 y S2, con la inclusión de ítems o problemas que se denominan congruentes o incongruentes con el conocimiento sobre números naturales. Los ítems o problemas congruentes se refieren a “aquellos en los que un conocimiento sobre los naturales permite obtener una respuesta correcta” (González-Forte, et al., 2019, p. 364), y se asocian a S1. Por ejemplo, en la pregunta sobre si el número que resulta del producto de 3.5 por 2 es mayor o menor que 2, el conocimiento que se tiene sobre el producto de números naturales de que el producto siempre es mayor que los factores llevaría a dar como respuesta que será mayor que 2. Cuando dicho conocimiento da una respuesta incorrecta se consideran ítems incongruentes y se asume que la respuesta correcta podría darse solo si se emplea el pensamiento analítico. Para este tipo de ítems funciona considerar el producto de 0.5 por 2, en el que el citado conocimiento sobre números naturales lleva a dar una respuesta incorrecta. Se ha reconocido la presencia de diferentes tipos de sesgos: el sesgo del número natural, el sesgo inverso y el pensamiento en diferencias. González-Forte, et al. (2019) explica que todos representan de igual forma la aplicación incorrecta de propiedades de los números naturales al identificar a los

números racionales o una parte de ellos, como el numerador, el denominador o a la parte decimal de un número racional, con los números naturales y su comportamiento; por ejemplo, considerar que el número $\frac{2}{5}$ es menor que $\frac{3}{10}$ porque 2 es menor que 3 y 5 menor que 10, o que entre los números 2.7 y 2.6 no hay ningún otro número porque entre 6 y 7 no existe otro número natural. El sesgo inverso se asocia a la representación parte-todo de un número racional y se caracteriza por comparar solo los denominadores de las fracciones, considerando mayor a la fracción con menor denominador porque se piensa que *las partes son más grandes*. El pensamiento en diferencias se basa, precisamente, en comparar las diferencias absolutas entre el numerador y denominador de ambas fracciones, considerando como fracción menor la asociada a la diferencia mayor; estos dos últimos sesgos se consideran como razones por las que algunos estudiantes resuelven incorrectamente los ítems congruentes y correctamente algunos de los ítems congruentes (González-Forte, et al., 2019).

Se coincide con De Corte (2004) respecto a la importancia de la disposición matemática que deben desarrollar los estudiantes para mejorar su competencia, y se destacan cinco categorías de aptitud que deben estar presentes como parte de esta disposición: 1) conocimiento y dominio matemático específico, bien organizado y flexiblemente accesible, 2) estrategias de búsqueda para la resolución de problemas, 3) metacognición sobre lo que se sabe, lo que lo motiva y las emociones que pueden impulsar el aprendizaje, 4) autorregulación de los procesos cognitivos y 5) creencias sobre sus capacidades, sobre el aprendizaje y la enseñanza, así como sobre la matemática y la solución de problemas (Traducción propia). En este sentido, nos interesa entender cómo la categoría de las creencias está presente en el actuar de S1 y S2.

Shoenfeld (1992) citó el reporte de la Evaluación Nacional del Progreso Educativo (NAEP por sus siglas en inglés) de 1983, en el que se dio cuenta que en los resultados de la encuesta aplicada, aproximadamente la mitad de los estudiantes estuvieron de acuerdo con la afirmación: *aprender matemáticas consiste principalmente en memorizar*; el 75% coincidieron en que: *hacer matemáticas requiere de mucha práctica para seguir reglas*; y nueve de cada diez estudiantes estuvieron de acuerdo con la afirmación: *siempre hay una regla que se debe seguir para resolver problemas de matemáticas*. Con esta base, Shoenfeld (1992) expresa que, dadas estas creencias de los estudiantes, es posible que ni siquiera intenten resolver problemas para los que no tienen un método claro que hayan aprendido con anterioridad, y que puedan explorar en su memoria o que claudiquen en la búsqueda de la solución de un problema luego de solo unos minutos de haber comenzado. Estas creencias de los estudiantes van en contra de la idea de Leron y Hazzan (2006) respecto a que en la enseñanza de la matemática se espera que los individuos dediquen una cantidad de tiempo importante a la solución de

problemas, que piensen detenidamente en lo que hacen y que expliquen con lujo de detalle sus respuestas; es decir, en la enseñanza de la matemática hay una necesidad de formar personas conscientes de la forma en que operan S1 y S2, y que esta conciencia forme parte de su actuar mientras resuelven problemas.

En la Tabla 1 se establecen las similitudes y diferencias establecidas por Leron y Hazzan (2006) en el abordaje del pensamiento intuitivo y analítico encontradas en la teoría de los procesos duales de la psicología cognitiva y la educación matemática.

Tabla 1

Perspectiva de la Teoría de los procesos duales vs Perspectiva de la Educación matemática

| Perspectiva de la Educación Matemática | Cognición | | Metacognición | |
|---|-----------|-----------------------|---------------|---------------------------------------|
| | Intuición | Pensamiento analítico | Autocontrol | Creencias y gestión de recursos, etc. |
| Perspectiva de la Teoría de los procesos duales | Sistema 1 | Pensamiento regulado | Autocontrol | |
| | | Sistema 2 | | |
| | | Cognición | | |

Nota: Traducción nuestra. Leron y Hazzan (2006)

Mientras que para la psicología educativa la metacognición es parte de la cognición y está integrada a S2, en educación matemática la metacognición se entiende externa a la cognición y va más allá del autocontrol (De Corte, 2004).

Como ya hemos dicho en párrafos anteriores, nuestro estudio se centra en las creencias de los estudiantes, mismas que ubicamos en la categoría de la metacognición y que entendemos fuera del sistema S2. McLeod (1992) sitúa a las creencias en la frontera entre el afecto y la cognición, y las clasifica respecto del objeto o sujeto sobre el cual se manifiestan, esto es: creencias sobre la matemática como disciplina, creencias sobre uno mismo, creencias en relación con la enseñanza y la solución de problemas, y creencias sobre los contextos en los que se produce la enseñanza.

Las creencias sobre la matemática hacen referencia a aquellas que se tienen respecto a la importancia que tiene o no esta ciencia en la vida cotidiana, si son fáciles o difíciles o, por ejemplo, que las matemáticas son útiles pero implican principalmente memorizar y seguir reglas. Las creencias sobre uno mismo se refieren a las creencias de autoeficacia, es decir, creencias sobre las propias capacidades, y en el caso que nos ocupa, creencias sobre las capacidades para resolver problemas de matemáticas, particularmente problemas con números racionales; estas creencias incluyen el autoconcepto.

Las creencias sobre los contextos tienen que ver con las ideas que los estudiantes y profesores conforman respecto a las normas en el salón de clase y aquellos estereotipos sociales sobre alumnos y profesores de matemáticas y su comportamiento. Para Gómez-Chacón, et al. (2006), las creencias no aparecen de manera aislada, no son independientes y todas se interrelacionan, razón por la que suelen considerarse como un sistema. En la investigación que nos ocupa, el sistema de creencias se integra por las que los estudiantes tienen sobre las matemáticas, sobre la enseñanza, el aprendizaje y la resolución de problemas, y las creencias de autoeficacia en la resolución de problemas matemáticos.

Había que integrar, por un lado, la relevancia de la presencia de las creencias señalada por Shoenfeld (1992) y documentada por estudios como el de Vamvakoussi, et al., (2012), Van Hoof, et al., (2013) y De Corte (2015), cuando los estudiantes se enfrentan a resolver problemas, en el sentido de que estas pueden llevarlos a intentar responder siguiendo únicamente reglas aprendidas con anterioridad y trabajo de memoria, al que además deben concurrir con cierta rapidez y que los llevarían a emplear la intuición para dar una respuesta. Por otro lado, se debía integrar la necesidad señalada por Leron y Hazzan (2006) en torno a que el pensamiento matemático de los estudiantes debiera forjarse con, la llamada por Fischbein, una carga intuitiva que permita la ocurrencia productiva de un razonamiento influenciado por dicha intuición. Al tiempo, se debe controlar su incidencia, y tomar el tiempo necesario para analizar el problema y organizar adecuadamente aquello que lo lleve a dar una respuesta correcta (y fue la teoría del doble proceso la que permitió distinguir el pensamiento intuitivo del pensamiento analítico), y, finalmente, el tercer aspecto: el sesgo del número natural y demás sesgos señalados en este apartado hicieron posible que en la práctica se plasmara su ocurrencia de manera explícita cuando se resuelven problemas con números racionales.

MÉTODOS Y MATERIALES

Procedimiento

Se diseñaron tres instrumentos para el levantamiento de la información: una escala de Likert, que hizo posible identificar el sistema de creencias de los estudiantes, y dos cuestionarios, uno de opción múltiple y uno que incluía problemas para que los estudiantes los resolvieran libremente, pero en el que se les pedía que argumentaran sus respuestas. Estos dos cuestionarios permitieron identificar el tipo de razonamiento que emplean los estudiantes cuando resuelven problemas con números racionales. Dos de los tres instrumentos se presentaron en un cuestionario de Google, y el tercero se escribió en un archivo PDF para que los participantes lo resolvieran a modo de tarea y regresaran sus respuestas escritas en puño y letra.

Fueron las profesoras de matemáticas quienes se encargaron de distribuir los instrumentos entre los alumnos, a la vez que dieron instrucciones sobre cómo responderlos. Los links de los cuestionarios de Google y el PDF se enviaron a las maestras de los grupos el día 8 de marzo de 2021, el contacto que ellas tuvieron con los estudiantes fue en las sesiones sincrónicas que se tenían como parte de las clases de matemáticas de sus cursos ordinarios y que en ese momento de estaban llevando a cabo de manera virtual, esto porque el levantamiento de la información ocurrió durante el confinamiento por la pandemia SARS COVID-19.

La recepción de la información fue inmediata para el caso de la escala y el cuestionario de opción múltiple, las respuestas de los estudiantes se fueron reflejando una a una en el formulario de Google. Los PDF con las respuestas de los estudiantes fueron remitidas directamente por ellos a una dirección de correo que se les proporcionó al momento en el que se les compartieron los instrumentos.

Instrumentos

La escala tipo Likert fue construida con base en la escala CreeMat empleada por Gómez-Chacón, et al. (2014); de esta tomamos los ítems que hacían referencia a la identificación de las creencias sobre la matemática, sobre su enseñanza y aprendizaje, y la resolución de problemas y las creencias de autoeficacia, ítems 4,5,7, 9, 10, 11 y 13. Los ítems restantes fueron inspirados por el instrumento reportado en Gómez-Chacon, et al. (2006). El instrumento quedó integrado por catorce ítems; cuatro ítems para rescatar las creencias sobre la matemática (9, 2, 8 y 7), tres para identificar la dimensión de creencias sobre el aprendizaje (1,5 y 4), dos para las de la enseñanza (6 y 14) y cinco ítems para rescatar las creencias de autoeficacia (3, 10,11,12 y 13). Las respuestas se distribuyeron en cinco niveles, de lo negativo a lo positivo: *casi nunca, solo a veces, más o menos, casi siempre y siempre*; el formulario permitía la elección de una y solo una respuesta por cada ítem.

Para identificar la presencia del razonamiento intuitivo o sistema S1, o del razonamiento analítico o sistema S2 cuando los estudiantes resuelven problemas, diseñamos un cuestionario de opción múltiple integrado por problemas sobre números racionales dividido en dos partes. La primera estaba integrada por seis ítems de opción múltiple, cuatro de ellos tomados de los instrumentos de González-Forte, et al. (2019), que consiste en preguntar a los estudiantes si el resultado de la multiplicación de un número natural por un racional será mayor a menor que el número natural en cuestión, mismos que fueron diseñados “teniendo en cuenta dos variables: el tipo de representación” (p. 39) (fraccionaria o decimal) y la congruencia o incongruencia con el conocimiento implícito sobre la multiplicación de números naturales que consideran que el producto de dos números naturales

siempre es mayor que cualquiera de los factores. La segunda parte se integró de nueve problemas de comparación de fracciones que diseñamos empleando la idea de González-Forte, et al. (2019) de incluir problemas congruentes e incongruentes con el sesgo del número natural, y que resultaban congruentes o incongruentes con los otros tipos de sesgo que se han detectado en la literatura; el sesgo inverso y el pensamiento en diferencias. Por ejemplo, en el ítem diez se pedía a los estudiantes que encerraran en un círculo el número racional que consideraban mayor entre $\frac{12}{5}$ y $\frac{12}{8}$, este ítem es incongruente con el conocimiento sobre números naturales si se comparan solo los numeradores y denominadores, 12 es igual a 12 y 5 es menor que 8, luego $\frac{12}{5}$ es menor que $\frac{12}{8}$, o si sólo se comparan denominadores que los lleva a dar la misma respuesta errónea; sin embargo, es congruente con el sesgo inverso si se considera que las cinco partes de un entero son más grandes que las ocho partes. Esta idea llevaría a los estudiantes a dar una respuesta correcta considerando que el numerador es el mismo. Otro ejemplo es el ítem 14, en el que los números a comparar eran $\frac{29}{17}$ y $\frac{13}{20}$, este es congruente si sólo se comparan numeradores, el sesgo inverso también lleva a dar una respuesta correcta, pero el pensamiento en diferencias lleva a dar una respuesta incorrecta. Aun cuando no era nuestro centro de atención el identificar los sesgos presentes, fue de suma importancia tener consciencia de su existencia para que la interpretación dada a la respuesta de los estudiantes fuese más cercana a la realidad escolar.

Luego de cada ítem incluimos la pregunta explícita ¿cómo lo sabes?, que propone el autor citado en el párrafo anterior;. La parte importante de nuestra investigación radica en hacer evidente la presencia de S1 o S2 en la solución que dieran los estudiantes, por ello se esperaba que los estudiantes resolvieran los ítems congruentes empleando solo el pensamiento intuitivo y, a menos que la respuesta a la pregunta explícita contenga alguna idea sobre números racionales en tanto a la conceptualización de mayor qué y menor qué, es que se consideró la presencia de S2. Si el problema es incongruente y los estudiantes lo resolvieron de manera incorrecta, entonces esto ratificaría que sólo aplicaron S1. Si el problema es incongruente y lo resolvían de manera correcta, y su respuesta a la pregunta explícita se asocia a alguna definición o propiedad de los números racionales, se ratificaba el empleo de S2.

Se diseñó un segundo cuestionario integrado con problemas en los que los estudiantes tenían que calcular sumas (tres ítems), restas (tres ítems) y multiplicaciones (cinco ítems) de dos números racionales de manera libre. Este último instrumento contribuyó a rectificar la determinación de la presencia de S1 o S2 en las respuestas de los estudiantes, ya que también se les pedía que explicaran cómo calcularon su respuesta, y se incluían operaciones entre números racionales con igual y diferente denominador.

Muestra de estudio

Los instrumentos se diseñaron en el marco de un proyecto de tesis de mayor alcance en el que se trabaja desde mayo del 2020; en enero-febrero del 2021 se pretendía que su aplicación se realizara directamente a la población objetivo (en la cual fueron 585 estudiantes de cinco grupos de primero, segundo y tercero de una escuela secundaria del sector público en el estado de San Luis Potosí), cuando aún no sabíamos el alcance que tendría la cuarentena a la que fuimos confinados a finales de marzo del 2020. En la idea de probar los instrumentos y tomando en cuenta el hecho de que estos tendrían que ser aplicados de manera remota, consideramos importante que los grupos elegidos tuvieran una oportunidad real de responderlos desde sus dispositivos móviles o computadoras personales, de tal forma que se eligió una escuela secundaria del sector privado que le era accesible a una de las autoras del presente artículo a través de un familiar. Las profesoras a las que se contactó informaron que todos los alumnos que formaban parte de los grupos de primero, segundo y tercer grado de dicha escuela contaban con los medios necesarios para que esto ocurriera.

La escuela corresponde al sector privado y ofrece nivel educativo de secundaria y bachillerato en el turno matutino en la ciudad de Zacatecas. La mayoría de las familias de los estudiantes son de un estrato económico medio y alto, lo que garantizaba que todos tuvieran acceso a internet, equipos de cómputo y dispositivos móviles que hicieran posible la aplicación de los instrumentos. En este momento no se cuenta con elementos que permitan hablar de un sesgo dadas las características particulares de la muestra tomada para el estudio.

Resultados de la aplicación de los instrumentos.

De un total de cincuenta y tres estudiantes de entre 13 y 14 años a los que se enviaron los instrumentos, obtuvimos cincuenta y tres respuestas de la escala de creencias. Solo treinta y tres resolvieron el cuestionario de opción múltiple, y únicamente trece resolvieron los problemas incluidos en el PDF. Considerando las intersecciones entre las respuestas obtenidas en los tres instrumentos, el total de alumnos que contestó los tres fue de once.

Análisis de la información.

Para el análisis de la información etiquetamos a los estudiantes como A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10 y A11, haciendo únicamente alusión a que eran Alumnos, y dado que no se tiene el objetivo de reportar características de género en el análisis y presentación de las respuestas se consideró suficiente informar que cinco de los estudiantes son hombres y seis mujeres.

Para el análisis e interpretación de los resultados se procedió a un vaciado de la información obtenida en la escala de creencias y los ítems de opción múltiple en una tabla de Excel en la que se podía identificar a los estudiantes

por renglón; en las columnas estaban las elecciones hechas por ellos a cada ítem. También se vaciaron en 22 columnas las respuestas numéricas dadas a las operaciones con números racionales y la justificación que dieron de sus cálculos, de este modo podíamos movernos en lo horizontal para revisar cada respuesta de un mismo participante, y en lo vertical para analizar las coincidencias o diferencias entre las respuestas de los once estudiantes. Además, podíamos revisar las imágenes de las respuestas a las operaciones cada vez que lo consideramos necesario.

Primero se realizó el análisis de la escala de creencias, para lo cual elaboramos un referente de contraste previo. Como ejemplo describimos la elaboración del citado referente para la dimensión del sistema de creencias de autoeficacia de la matemática que se correspondía con los ítems:

3. Cuando no puedo resolver un problema de matemáticas rápidamente dejé de intentarlo,
10. Puedo trabajar con cualquier tarea de matemáticas y obtener buenas calificaciones,
11. Puedo resolver cualquier problema de matemáticas, aunque sea difícil,
12. Puedo resolver correctamente cualquier problema con fracciones y
13. Entiendo todo lo que mi profesor explica sobre fracciones.

Consideramos que dicha dimensión del sistema de creencias era favorable al pensamiento S1 y, por tanto, desfavorable al pensamiento analítico si su respuesta era *Siempre* o *Casi siempre* al ítem 3, y *Casi nunca* o *solo a veces* al ítem 11; es decir, se interpretó que un estudiante que *Siempre* o *Casi siempre* cuando no puede resolver un problema de matemáticas rápidamente deja de intentarlo y *Casi nunca* o *Solo a veces* puede resolver un problema de matemáticas aunque sea difícil, tiene una tendencia a aplicar el pensamiento intuitivo, ya que el estudiante cree que el tiempo juega en contra de las habilidades en la solución de problemas.

En este sentido encontramos que ningún estudiante cayó en esta clasificación, ya que todos respondieron que *solo a veces* o *casi nunca* abandonan un problema cuando no lo pueden resolver con rapidez, y nueve de estos estudiantes respondieron que *más o menos, casi siempre* o *siempre* pueden resolver un problema de matemáticas aunque sea difícil. Los otros dos estudiantes que respondieron al ítem 11 con un *solo a veces*, responden *más o menos* al ítem 10 y *casi siempre* o *más o menos* a los ítem 12 y 13. Por esta y otros resultados descritos en el apartado correspondiente, se reporta que encontramos un alto sentido de autoeficacia en la mayoría de los estudiantes. Luego de analizar los resultados de la escala de creencias se procedió a la elaboración de la Figura 1, que facilitó observar el sistema de creencias de los estudiantes de manera sintetizada.

Paso seguido, se procedió al análisis del cuestionario de opción múltiple para identificar el empleo del razonamiento intuitivo y/o analítico, se revisaron las respuestas a los ítems congruentes y se hizo una tabla con número

de ítems congruentes resueltos de manera correcta e incorrecta por cada estudiante; esto hacía evidente la presencia de la aplicación del razonamiento intuitivo. Luego se analizaron las respuestas a los ítems incongruentes y se agregaron dos columnas más en las que se anotó la cantidad de ellos que fue resuelta de manera incorrecta, y en otra la cantidad de ítems incongruentes resueltos de manera correcta; esta tabla permitió descartar solo el empleo del razonamiento intuitivo cuando la mayoría de los ítems incongruentes eran resueltos de manera correcta y se corroboraba la presencia de alguna definición o conocimiento específico sobre números racionales en su respuesta a la pregunta *¿Cómo lo sabes?* El análisis del cuestionario de problemas fue posterior a los dos primeros análisis, y se recurrió directamente a los resultados cuando existía duda respecto a la ratificación del empleo del razonamiento analítico en la respuesta a la pregunta *cómo lo sabes*, que dejaba duda sobre el conocimiento empleado acerca de números racionales.

Tal fue el caso de A10, que respondió incorrectamente la mitad de los ítems congruentes (cuatro de ocho) y a tres de los ítems incongruentes (tres de siete), de tal forma que lo que definió su tipo de razonamiento empleado fueron sus respuestas a las preguntas *¿Cómo lo sabes?* y las justificaciones que da al cuestionario de operaciones con números racionales.

RESULTADOS, DISCUSIÓN Y APORTACIONES

En el reporte de los resultados emplearemos cursivas para resaltar las frases que corresponden literalmente con las preguntas incluidas en alguno de los instrumentos empleados, y pondremos entre comillas y con letra cursiva la transcripción textual de las respuestas de los estudiantes a la pregunta *¿Cómo lo sabes?* que se incluyó luego de cada ítem de opción múltiple.

Sobre la Escala de creencias

Las respuestas de la escala de creencias se distribuían en cinco niveles, de lo negativo a lo positivo: *casi nunca*, *solo a veces*, *más o menos*, *casi siempre* y *siempre*. Los resultados indican que la mayoría de los estudiantes tienen creencias sobre la matemática que podrían considerarse positivas, por ejemplo, diez de los once estudiantes asocian la idea de que solo los genios aprenden matemáticas con un *casi nunca*, y con un *siempre* o *casi siempre* la idea sobre que *cualquiera puede aprender matemáticas*. Siete de los once creen que “las matemáticas nos permiten entender mejor el mundo en que vivimos”, y los once estudiantes creen que “las matemáticas se tratan de entender los procedimientos para aplicarlos en la solución de problemas”.

Si la creencia de que *las matemáticas se tratan de procedimientos que tenemos que memorizar* la interpretamos como una creencia desfavorable para la actuación de S2, los resultados indican que el 82% de los estudiantes tienen una buena disposición al pensamiento analítico, ya que nueve consideran que la memorización se requiere *solo a veces* o *más o menos*, y solo tres consi-

deran que la memorización está presente en el aprendizaje de la matemática *siempre o casi siempre*.

Las creencias de autoeficacia son en general altas en la mayoría de los estudiantes, en sus respuestas encontramos que nueve de los once creen que *más o menos, casi siempre o siempre pueden resolver cualquier problema de matemáticas aunque sea difícil*, seis de ellos creen que *más o menos o siempre* pueden además obtener buenas calificaciones. Los once estudiantes creen que *más o menos, casi siempre o siempre* han entendido todo lo que su profesor explicó sobre fracciones, que lo recuerdan y que pueden resolver cualquier problema con ellas.

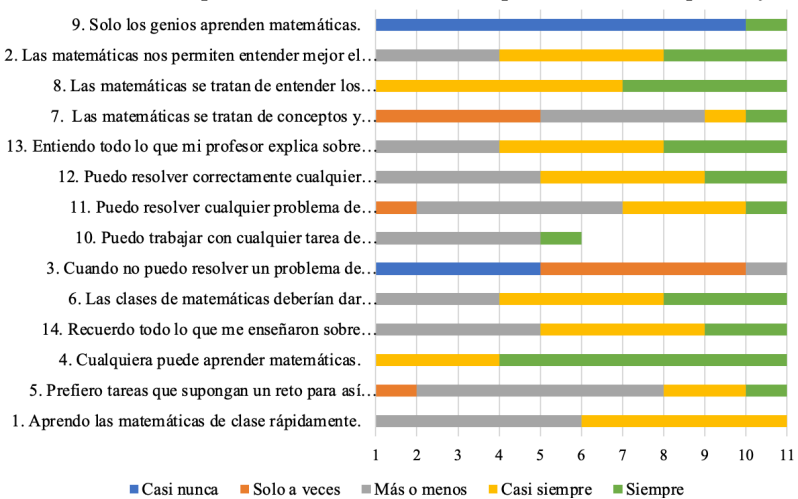
Los resultados indican que todos los estudiantes creen que “las clases de matemáticas debieran dar importancia a la solución de problemas”, esta se interpretó como una creencia sobre la enseñanza favorable al pensamiento analítico.

Los once estudiantes consideran que *más o menos o casi siempre* aprenden las matemáticas rápidamente, y además que *siempre o casi siempre* cualquiera puede hacerlo. Nueve de los once prefieren *más o menos, casi siempre o siempre* que las tareas supongan un reto para así aprender cosas nuevas de matemáticas en casa.

La figura 1 puede ilustrar la generalidad de las respuestas dadas por los estudiantes.

Figura 1

Resultados de la escala tipo Likert de creencias ordenadas por objeto-sujeto al que se refieren.



Nota. Ordenamos las creencias respecto al objeto-sujeto al que hacen referencia: creencias sobre la matemática ítems 9, 2, 8 y 7, creencias de autoeficacia: ítems 13, 12, 11, 10 y 3, creencias sobre la enseñanza: ítems 6 y 14 y creencias sobre el aprendizaje: ítems 4, 5 y 1. Se muestran completas algunas de las preguntas, los puntos suspensivos al final de algunas, indican que la pregunta está incompleta en la gráfica.

Sobre el cuestionario de opción múltiple de multiplicación y comparación de números racionales.

De los seis ítems sobre multiplicación de fracciones incluidos en el cuestionario de opción múltiple, cuatro eran congruentes y dos incongruentes. En coincidencia con lo reportado en González-Forte, et al. (2019), los estudiantes sí tuvieron más éxito en los ítems congruentes que en los incongruentes, aunque porcentualmente la diferencia fue mucho menor: 86% y 81% contra 94.64% y 83.93%, que es la reportada por dicho autor.

El ítem incongruente con menos respuestas correctas, ocho de once, fue el ítem de la multiplicación de 5 por $\frac{1}{2}$. Entre las respuestas a la pregunta *¿cómo lo sabes?*, encontramos: “porque un medio vale .5”, “transformé la expresión” y “los multiplique”; interpretamos que las dos últimas respuestas dan cuenta de que los estudiantes calcularon la representación decimal del producto, a pesar de la indicación explícita que se daba en la presentación del cuestionario sobre que respondieran sin calcular el producto. Inicialmente se puede entender que estos dos estudiantes, A9 y A10 respectivamente, tienen problemas de aprendizaje con la comparación de fracciones en cualquiera de sus formas, fraccionaria o decimal.

En el caso de A10, esto se confirma con los resultados de sus respuestas en dicho apartado del cuestionario, ya que 6 de las 9 que da sobre la comparación de fracciones son incorrectas, tres de estas en problemas incongruentes en los que se hace evidente la presencia del sesgo del número natural de acuerdo con su respuesta a la pregunta *¿cómo lo sabes?* En el ítem *¿Qué número es mayor entre $\frac{24}{36}$ y $\frac{24}{51}$?*, A10 escribe: “por el 51”, es decir, considera erróneamente que $\frac{24}{51}$ es mayor porque 51 es mayor que 36. A10 da las otras respuestas erróneas a ítems congruentes. Cuatro respuestas incorrectas se podrían explicar con el sesgo de pensamiento en diferencias, ya que todas son congruentes con la idea que lo subyace. Las creencias presentes en A10 no se diferencian de las de la mayoría de los estudiantes; tiene un alto sentido de autoeficacia, considerando que declara haber entendido todo lo que sus profesores le enseñaron sobre fracciones, que *casi siempre* puede resolver los problemas aunque sean difíciles y sacar buenas calificaciones, que “cualquiera puede aprender matemáticas y que las matemáticas se tratan de entender los procedimientos para poder aplicarlos en la solución de problemas”, considera, además, que “solo a veces las matemáticas se tratan de procedimientos que tenemos que memorizar”.

En el caso de A9, los resultados de sus respuestas en el apartado de comparación de fracciones obtienen únicamente tres respuestas incorrectas, las tres correspondientes con ítems incongruentes y con el sesgo del número natural. La presencia de dicho sesgo se hace evidente en las respuestas correctas que justifica diciendo “el numerador es más grande que el otro”, “el numerador es más grande” o “el numerados es mayor”. A9 es el único que

asocia un *más o menos* a la creencia “cualquiera pueden aprender matemáticas”, y uno de los tres que asocian esta misma respuesta a la creencia “las matemáticas nos permiten entender mejor el mundo en que vivimos”. Sus creencias de autoeficacia se corresponden más bien con un nivel medio, ya que sus respuestas para la escala en cuatro de estos ítems las asocia con un *más o menos* o *solo a veces*, aunque declara que *casi nunca* deja de intentar rápidamente un problema cuando no puede resolverlo.

A4, quien es el otro caso con menos respuestas correctas en el apartado de multiplicación de fracciones y que en el ítem de la multiplicación de 5 por $1/2$ justifica su respuesta diciendo “porque un medio vale .5”, da 5 respuestas incorrectas a los ítems de comparación de fracciones, a pesar de que en tres de estas se comparan números racionales con el mismo denominador y que son congruentes en el marco del sesgo del número natural. Las otras dos se corresponden con ítems incongruentes, pero sus respuestas no se asocian ni al pensamiento en diferencias ni al sesgo inverso, en ambos casos su respuesta a la pregunta *¿Cómo lo sabes?* es “*por lo que vale la fracción*”. Dicha respuesta es la misma para los seis ítems que responde de manera correcta, lo que podría indicar que llama valor de la fracción a la representación decimal, pero no fue posible hacer una interpretación de sus errores y aciertos. En cuanto a sus creencias, A4 es el único que asocia un *casi nunca* a la creencia de que “las clases de matemáticas deberían dar importancia a la resolución de problemas matemáticos”, y es de los tres estudiantes que asocia un *más o menos* a la creencia de que “las matemáticas nos permiten entender mejor el mundo en que vivimos”. Sus creencias de autoeficacia también se corresponden con un nivel medio, ya que sus respuestas para la escala en cuatro de estos ítems las asocia con un *más o menos* o *solo a veces*, aunque declara que *casi nunca* deja de intentar rápidamente un problema cuando no puede resolverlo.

Presentando este nivel de detalle en uno de los estudiantes que responde correctamente a los 15 ítems, A7, podemos afirmar la presencia de razonamiento analítico dadas las justificaciones que escribe en sus respuestas a cada ítem de producto, a saber “porque $\frac{1}{2}$ es menor que uno”, “porque $\frac{3}{2}$ es mayor que uno”, “porque $\frac{5}{2}$ es mayor que uno”, “porque .5 es menor que uno”, “porque 1.5 es mayor que uno” y “porque 2.5 es mayor que uno”, y las que escribe en sus respuestas a cada ítem sobre comparación de fracciones “es mayor que un entero”, “se acerca más a un entero” “tiene más enteros” “es mayor a la mitad del entero y el otro no” y “supera el entero”. A7 asocia un siempre a las creencias: Cualquiera puede aprender matemáticas, Las clases de matemáticas deberían dar importancia a la resolución de problemas matemático, Las matemáticas se tratan de entender los procedimientos para poder aplicarlos en la solución de problemas, Puedo resolver correctamente cualquier problema con fracciones, Entiendo todo lo que mi profesor explica

sobre fracciones; un casi siempre a las creencias: Aprendo las matemáticas de clase rápidamente, Las matemáticas nos permiten entender mejor el mundo en que vivimos, Puedo trabajar con cualquier tarea de matemáticas y obtener buenas calificaciones, Puedo resolver cualquier problema de matemáticas, aunque sea difícil, Recuerdo todo lo que me enseñaron sobre fracciones; un más o menos a la creencia: Prefiero tareas que supongan un reto para así aprender cosas nuevas de matemáticas; y un casi nunca a la creencia Cuando no puedo resolver un problema de matemáticas rápidamente dejo de intentarlo. Cabe resaltar que A7 asocia un siempre a la creencia de que las matemáticas se tratan de conceptos y procedimientos que tenemos que memorizar, por lo que interpretamos que es consciente de la carga intuitiva de los conceptos matemáticos y de la necesidad de esta para la fluidez productiva del razonamiento, al mismo tiempo que controla su impacto en el curso del propio razonamiento (Fischbein, 1987, citado en Leron y Hazzan, 2006).

En promedio, los ítems congruentes fueron respondidos correctamente por el 81% de los estudiantes, a la vez que, en promedio, los ítems incongruentes se respondieron correctamente por el 74% de los estudiantes. De acuerdo a nuestra interpretación en la que consideramos que si los estudiantes respondían correctamente los ítems congruentes e incorrectamente los ítems incongruentes, estaríamos ante la presencia de un pensamiento intuitivo, pero que si respondían correctamente también a los ítems incongruentes y sus respuestas a las preguntas abiertas reflejaban el reconocimiento del comportamiento y propiedades de los números racionales y sus operaciones; entonces podemos afirmar que los estudiantes dieron paso al pensamiento analítico.

Los resultados indican que al menos el 69% de los estudiantes dio paso al razonamiento analítico cuando resolvieron problemas con números racionales, toda vez que en promedio fue el 69% que resolvió correctamente las operaciones con números racionales, haciendo énfasis en la definición de suma y producto de racionales impartido en el nivel escolar de secundaria; es decir, justifican su respuesta escribiendo para el caso de la suma: "Multiplique cruzado (6)(7) y (10)(4) después lineal (10)(7) luego sume $42+40$ por consiguiente reduce $\frac{82}{70}$ y quedó $\frac{41}{35}$ " y para el producto: "Multiplicar numerador X numerador y denominador X denominador", tal y como se puede apreciar en las Figuras 2 y 3.

Figura 2

Respuesta de A10 al primer problema de suma de fracciones.

① $\frac{6}{20} + \frac{4}{7} = \frac{42+40}{70} = \frac{82}{70} = \frac{41}{35}$

Multi. Plique cruzado (6)(7) y (10)(4)
después lineal (10)
(7) luego sume $42+40$
40 por consiguiente
reduce $\frac{82}{70}$
quedo $\frac{41}{35}$

Por un lado, conocer el sistema de creencias de los estudiantes aporta elementos al proceso de enseñanza para que, a través del actuar del docente frente a la matemática y la solución de problemas, se proporcione a los estudiantes experiencias que consoliden las creencias positivas y evite la generación de creencias que obstaculicen su aprendizaje. Es sabido que, conforme los estudiantes avanzan a través de los niveles escolares, las creencias de autoeficacia disminuyen significativamente. En los resultados obtenidos en la presente investigación destaca el hecho del alto sentido de autoeficacia que poseen aún los estudiantes de secundaria, de forma tal que se vuelve significativamente importante que las experiencias que se generen en el aula frente a la solución de problemas y el tipo de problemas que se proponga resolver, correspondan con características que los estudiantes asocien en un futuro al pensamiento matemático y a su desarrollo.

Figura 3

Respuesta de A9 uno de los problema de producto de fracciones.

Handwritten student work showing the multiplication of two fractions: $\frac{2}{5} \times \frac{9}{5} = \frac{18}{25}$. The student has written "Multiplicar numerador x numerador y denominador x denominador" above the calculation.

Por otro lado, resaltar en el salón de clase la importancia del pensamiento intuitivo y distinguirlo del pensamiento analítico haciendo énfasis en las ventajas de cada uno podría también contribuir a que los estudiantes generen procesos metacognitivos que mejoren su desempeño en la solución de problemas.

Dada la diversidad y riqueza de los instrumentos diseñados y aplicados a los estudiantes, los resultados ofrecen una amplia lista de aportaciones a la enseñanza de las matemáticas que en principio salen del alcance de la investigación que se presenta, basta un debido acercamiento teórico desde uno de los marcos empleados: teoría del doble proceso, sesgo del número natural o dominio afectivo para interpretar los resultados obtenidos; entre estos se pueden citar:

- Diferencias de género presentes en las creencias de autoeficacia de los estudiantes.
- Los estudiantes cometieron más errores en los problemas de comparación de fracciones. Sus respuestas a la pregunta *¿Cómo lo sabes?* cuando en la comparación se involucraron números racionales con el mismo denominador fueron: “por que $\frac{2}{3}$ esta mas acercado al entero solo le falta uno para el entero”, “porque la segunda fracción si la convertimos a enteros da $1\frac{2}{3}$ y la otra no alcanza el entero”, “ya que la segunda supera el entero y el otro no”; la respuesta “porque tienen el mismo denominador pero el numerador mas grande que el otro” abre la puerta para revisar el énfasis de la definición de “menor que” y “mayor que” en el conjunto de números racionales presente en la enseñanza a nivel

secundaria, ya que la tendencia indica que los estudiantes llevan el problema de comparación de fracciones al conjunto de los números enteros.

- Los estudiantes respondieron de forma correcta prácticamente todos los ítems que implicaban un producto de un número racional y un número entero, sin embargo, en sus respuestas a la pregunta ¿Cómo lo sabes? vuelven a estar presentes los números enteros: “Porque si 5 por 1 es 5 entonces 0.5 o 1 medio es menor que 5”, “como no es un entero no pasa de los cinco ya que cinco es el entero”, “porque multiplicamos y nos da 5 medios y luego lo convertimos y da 2 enteros”, “por que primero se multiplica el entero por la fracción y da $\frac{5}{2}$ y se divide y dan 2.5”; no parece estar claro que un número racional tienen una representación decimal y una representación como fracción, pero se trata del mismo número racional.
- En los problemas sobre operaciones con números racionales se hace evidente el énfasis a reducir la enseñanza de las operaciones con números racionales, a seguir reglas y a excluir quizá el razonamiento analítico: “Realizó una multiplicación cruzada de primer nominador por segundo denominador y del segundo nominador por primer denominador, para sumar el resultado y obtener el numerador. El denominador lo obtiene multiplicando ambos denominadores” fue casi la misma respuesta que dieron 10 de los 11 estudiantes, y solo uno respondió: “Busqué un número que al multiplicarlo diera el mismo denominador a ambas fracciones y después sumé”.

Este y otros aspectos presentes en los resultados podrían aportar elementos para la reflexión de cómo se trabajan los números racionales en la escuela secundaria.

CONCLUSIONES

De los resultados del análisis de la información recabada con cada uno de los instrumentos, podemos resumir las siguientes conclusiones:

El sistema de creencias presente en once estudiantes de nivel secundaria se caracterizó por integrar:

- a. Creencias favorables para con la matemática.
- b. No identifican la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas con la memorización de conceptos y procedimientos, y prefieren que las tareas de casa les representen retos y nuevos aprendizajes.
- c. Creen que aprenden las matemáticas de clase rápidamente.
- d. Creen que recuerdan todo lo que aprendieron sobre números racionales.
- e. Un alto sentido de autoeficacia.

Con este sistema de creencias:

- a. Los estudiantes tuvieron más éxito en los ítems congruentes con su conocimiento sobre números naturales que con los ítems incongruentes.
- b. Se hizo evidente la ocurrencia de un razonamiento analítico en al menos el 69% de los estudiantes cuando resolvieron problemas con números racionales.
- c. Se hizo evidente que las respuestas que dieron los estudiantes se correspondieron con un razonamiento intuitivo solo en un 31%.

La única creencia que distinguió a los estudiantes que sobrepusieron el razonamiento intuitivo al analítico de los que dieron paso al razonamiento analítico, es la creencia de que “las matemáticas solo a veces o más o menos nos permiten entender el mundo en el que vivimos; frente a la que afirma que: siempre o casi siempre las matemáticas nos permiten entender el mundo en el que vivimos”.

La creencias que diferenciaron a un estudiante que obtuvo todas las respuestas correctas de los demás son las que se interpretaron como una evidencia de que los estudiantes con mayor éxito en la solución de problemas reconocen la importancia de la carga intuitiva de los conceptos matemáticos, y que ésta se gana con procesos de memorización, o trayendo a la memoria lo aprendido con anterioridad para lograr una fluidez productiva del razonamiento analítico, al tiempo que controla su impacto en el curso del propio razonamiento. Esto se hizo evidente en las creencias manifestadas respecto a que “las matemáticas siempre se tratan de conceptos y procedimientos que tenemos que memorizar, en conjunto con la creencia de que las matemáticas se tratan de entender los procedimientos para poder aplicarlos en la solución de problemas”.

Los instrumentos que se emplearon para el levantamiento de la información resultaron de fácil aplicación y aportaron elementos que favorecieron el análisis de la información, lo que atribuimos a la lectura de antecedentes en los que se documentaba la presencia del razonamiento intuitivo cuando se daba respuesta a problemas con números racionales empleando el conocimiento sobre números naturales. De este modo fue posible la identificación de la actuación de los dos sistemas propuestos por la teoría de los procesos duales S1 y S2 en correspondencia con el pensamiento intuitivo y analítico.

El presente reporte forma parte de un estudio mayor en el que se persiguió el mismo objetivo, pero en un grupo de 585 estudiantes de una escuela particular de San Luis Potosí. A ellos se les aplicaron los tres instrumentos, de los cuales recibimos 108 intersecciones en las respuestas. Dicha información está aún en proceso de análisis.

REFERENCIAS

- Attridge, N., & Inglis, M. (2014). Increasing cognitive inhibition with a difficult prior task. *ZDM*, 47(5), 723–734. <https://doi.org/10.1007/s11858-014-0656-1>
- De Corte, E. (2004). Mainstreams and Perspectives in Research on Learning (Mathematics) From Instruction. *Applied Psychology: An International Review*, 53(2), 279–310. <https://doi.org/10.1111/j.1464-0597.2004.00172.x>
- De Corte, E. (2015). Aprendizaje Constructivo, Autorregulado, Situado Y Colaborativo: Un Acercamiento A La Adquisición De La Competencia Adaptativa (Matemática). *Páginas de Educación*, 8(2), 1–35. <https://doi.org/10.22235/pe.v8i2>
- Gómez-Chacón, I.M. (2006). Procesos de intuición en matemáticas: una experiencia con estudiantes para profesores de Secundaria. *Matemática*, 2(4), 1–5. <https://bit.ly/45ZYDqk>
- Gómez-Chacón, I. M., Eynde, P., & De Corte, E. (2006). Creencias de los estudiantes de matemáticas: la influencia del contexto de clase. *Enseñanza de las Ciencias*, 24(3), 309–324. <https://bit.ly/3Zf6vm0>
- Gómez-Chacón, I. M^a, García-Madruga, J. A., Rodríguez, R., Vila, J. O., & Elosúa, M. R. (2011). Mathematical beliefs and cognitive reflection: Do they predict academic achievement? En B. Roesken, & M. Casper (Eds.), *XVII Proceedings of the MAVI-17 Conference* (pp. 64–73). Professional School of Education, Ruhr- Universität Bochum. <https://bit.ly/3RaVlFW>
- Gómez-Chacón, I. M., García-Madruga, J.A., Vila, J. O., Elosúa Ma. R., & Rodríguez, R. (2014). The dual processes hypothesis in mathematics performance: beliefs, cognitive reflection, working memory and reasoning. *Learning and Individual Differences*, 29(1), 67–73. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2013.10.001>
- Gómez, D. M., & Dartnell, P. (2015). Sesgos y estrategias para la comparación de fracciones reveladas por análisis de grupos en segundo ciclo básico. En C. Vásquez, H. Rivas, N. Pincheira, F. Rojas, H. Solar, E. Chandía y M. Parraguez (Eds.), *Actas XIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática: XIX JNEM 2015* (pp. 146–153). SOCHIEM. <https://bit.ly/46otb5F>
- González-Forte, J., Fernández, C., & Llinares, S. (2019). El fenómeno natural number bias: un estudio sobre los razonamientos de los estudiantes en la multiplicación de números racionales. *Cuadrante*, 28(2), 32–52. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23026>
- González-Forte, J., Fernández, C., Van Hoof, J. & Van Dooren, W. (2019). Estudio cualitativo de los razonamientos de los estudiantes de primaria y secundaria sobre la magnitud de las fracciones. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano, & A. Alsina (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 363–372). SEIEM. <https://bit.ly/48b3aZe>

- Kahneman, D. (2003). Maps of bouden Rationality: psychology for behavioral economics. *The American economic review*, 93(5), 1449–1475.
<https://doi.org/10.1257/000282803322655392>
- Leron, U. & Hazzan, O. (2006). The rationality debate: Application of cognitive psychology to mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 62(2), 105–126. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-4833-1>
- Leron U. & Hazzan, O. (2009). Intuitive vs analytical thinking: Four perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 263–278.
<https://doi.org/10.1007/s10649-008-9175-8>
- López, C. (2006). La intuición y la matemática. *Revista de Ciencia y Tecnología*, 6, 29–36. <https://bit.ly/45MgbGL>
- López, V. O., Hederich-Martínez, C., & Camargo, U. A. (2012). Logro en matemáticas, autorregulación del aprendizaje y estilo cognitivo. *Suma Psicológica*, 19(2), 39–50. <https://bit.ly/3Pawnpup>
- McLeod, D.B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En D.A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on mathematics Teaching and Learning* (pp. 575–598). Macmillan.
- Schoenfeld, H. A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *Journal of education*, 196(2), 1–38. <https://doi.org/10.1177/002205741619600202>
- Stanovich, K. E., & West, R. F. (2000). Individual differences in reasoning: implications for rationality debate?. *Behavioral and sciences*, 23(5), 645–665.
<https://bit.ly/3qZSig1>
- Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(3), 344–355.
<https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.02.001>
- Van Hoof, J., Lijnen, T., Verschaffel, L., & Van Dooren W. (2013). Are secondary school students still hampered by the natural number bias? A reaction time study on fraction comparison tasks. *Research in Mathematics Education*, 15(2), 154–164. <https://doi.org/10.1080/14794802.2013.797747>

