

Análisis de contenido y cognitivo para favorecer el diseño de tareas sobre fracciones

Rubén Omar González Balderas¹,
Judith Alejandra Hernández Sánchez² y Darly Alina Kú Euán³

RESUMEN

En este escrito se muestra el análisis de contenido y cognitivo realizados a los documentos curriculares mexicano del nivel primaria correspondientes al plan de estudios 2017 para el tema de fracciones. Se eligen las fracciones considerando las dificultades de enseñanza reportadas en diferentes estudios. Para la obtención de la información se utilizó la técnica del análisis de contenido. Los resultados son los significados de las fracciones que se favorecen en cada grado escolar; además de las expectativas y limitaciones de aprendizaje asociadas. Esta información servirá a los profesores de matemáticas para el diseño de tareas en el contexto de talleres de formación continua; considerando que ahí reside gran parte de la problemática en el aprendizaje de las fracciones en este nivel educativo.

PALABRAS CLAVE

Análisis didáctico, Educación primaria, Fracciones.

¹ maresillos@hotmail.com

Secretaría de Educación del Estado de Zacatecas- Escuela Primaria Manuel Ávila Camacho
<https://orcid.org/0009-0006-4857-3678>

² judith700@hotmail.com

Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas
<https://orcid.org/0000-0003-0569-2037>

³ ku.darly@gmail.com

Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas
<https://orcid.org/0009-0009-3259-2657>

ANTECEDENTES

El tratamiento de las fracciones en las propuestas curriculares de entre 1960 y 2011 en México presentan debilidades que han sido ampliamente estudiadas, estableciéndolas como un contenido difícil de enseñar en el nivel primaria (Ávila, 2019). Aunado a lo anterior, en el 2018 la prueba PLANEA (Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes) estableció que los conocimientos asociados a las fracciones se sitúan en el Nivel III y IV de los aprendizajes matemáticos para el nivel primaria. En ese año, la Secretaría de Educación Pública [SEP] (2018) mostró que sólo el 15% de los estudiantes de sexto grado de primaria se encuentran en el Nivel III y el 8% en el Nivel IV. De esta manera, la comprensión del tema de fracciones se asocia a un dominio satisfactorio (Nivel III) o sobresaliente (Nivel IV) para las matemáticas de este nivel educativo. Estas situaciones han puesto a las fracciones como un tema importante para la investigación del campo, y de preocupación para las instancias educativas mexicanas interesadas en alcanzar un dominio satisfactorio en las evaluaciones de los aprendizajes en matemáticas.

Existen investigaciones relacionadas con la enseñanza de las fracciones en el nivel primaria que dan evidencia del papel que juegan los significados potenciados y sus problemáticas asociadas. Estos son principalmente revisiones de documentos oficiales que sirven de referencia a la práctica de los profesores. Entre ellos están los significados potenciados en los libros de texto turcos y singapurenses (Önder, 2021), la relación entre los significados evidenciados en una práctica docente en Nueva Zelanda (Getenet & Callingham, 2017), o bien, la revisión documental de materiales didácticos para la enseñanza de las fracciones en el nivel primaria en Brasil (Novaes et al., 2020).

La mayoría de los estudios sobre fracciones se concentran en las debilidades que se han presentado en su tratamiento a través de diferentes propuestas curriculares para su enseñanza (Ávila, 2019). El presente trabajo propone que en las debilidades asociadas a la multiplicidad de significados de las fracciones se puede constituir conocimiento útil para el profesor de matemáticas al momento de diseñar tareas.

Elegimos dos investigaciones entre las muchas otras que han analizado la multiplicidad de significados de las fracciones, las cuales son de reciente publicación y abordan propuestas curriculares de cuatro países, incluyendo a México, que es donde situaremos la presente investigación. Ambos estudios analizan libros de texto, dado que sus actividades y lecciones pueden favorecer u obstaculizar la enseñanza. Además, estos materiales evidencian lo planteado en los programas y planes de estudio establecidos por las instituciones oficiales de cada país, los cuales se convierten en un referente para la práctica docente de los profesores.

En Ávila (2019) se presenta un análisis de los libros de matemáticas utilizados en México entre 1960 y 2011 en el nivel primaria. La autora define la propuesta curricular de 1960 como “didáctico-intuitiva”, donde la fracción se aborda como parte-todo y las nociones de razón y proporción carecen de intuición para apoyar su comprensión. El libro introducido en 1972 incluye a la estructura de las fracciones la concepción de número racional, conformado por las nociones de operador multiplicativo, razón, medida y cociente. Finalmente, la propuesta de 1993, a la que se le llamó “constructivista”, incrementó la definición del significado de fracciones al sumar elementos contextualizados mediante la resolución de problemas; además, mantiene las nociones asociadas a la fracción de la propuesta anterior. No obstante, este libro carece de la definición formal del concepto.

Ávila (2019) concluye que se priorizó el significado de la relación parte-todo al trabajar con menor frecuencia los demás significados, enseñanza que se sigue reflejando en los resultados de exámenes nacionales como PLANEA. Por tal motivo, las reformas curriculares no garantizaron cambios en la instrucción de las fracciones por parte de los profesores.

Alajmi (2012) describe cómo las fracciones son tratadas en libros de texto de países como Kuwait, Japón y Estados Unidos. En Japón, las fracciones se trabajan a través de la medición para ayudar a los estudiantes a entenderlas como cantidades; hacen uso de cintas métricas para mostrar unidades fraccionarias y sus contextos, en su mayoría, son matemáticos. En Estados Unidos se utilizan tres modelos para representar fracciones: los de área como parte de un todo, los discretos como parte de un conjunto de objetos, y el que hace uso de la recta numérica. A diferencia de los libros de Japón, desde el primer grado se presenta la resolución de problemas a través de contextos del mundo real.

En Kuwait se centran en la repetición de procedimientos al presentar ejemplos resueltos en contextos matemáticos. También se introducen reglas matemáticas en las definiciones, seguidas de ejercicios para la práctica. A partir de cuarto grado se adopta el modelo de área para ilustrar fracciones como parte de un todo, haciendo uso de un contexto que parte del mundo real. Finalmente, este autor evidencia que existe mayor rendimiento en este tema cuando los profesores se dedican a desarrollar sus significados y apoyar a los alumnos con diferentes métodos de cálculo (estimar, calcular mentalmente y usando calculadora), en lugar de centrarse solo en el procedimiento de papel y lápiz.

De los estudios antes descritos podemos rescatar los diferentes modelos adoptados para la enseñanza de las fracciones en el nivel primaria (dirigido a estudiantes de 6 a 11 años de edad) de cuatro países. Estos dejan en evidencia la multiplicidad de significados de las fracciones y algunas limitaciones en su planteamiento.

Desde los aspectos observables en planes y programas de estudio, libros de texto para el alumno y libros para el maestro propuestos por la Secretaría de Educación Pública, en el caso de México, el tratamiento de las fracciones ha tenido diversas modificaciones al devenir de los años, cambios que subyacen en las innovaciones que se hacen latentes en cada reforma educativa.

En México se han encontrado innovaciones educativas valiosas para el tema de fracciones, sin embargo, no se han obtenido avances notables en el rendimiento matemático de los estudiantes. Evidentemente, no basta con plasmarlo en documentos oficiales, sino que es necesario favorecer experiencias de aprendizaje profesional que brinden a los maestros oportunidades para mejorar su comprensión del conocimiento didáctico del contenido para la selección y diseño de tareas de enseñanza, y, en consecuencia, mejorar la organización sistemática de su práctica docente. Parafraseando a Ávila (2019), quizá sea mejor encontrar formas de perfeccionar lo que los profesores saben y hacen, que hacer esfuerzos por innovar.

En este sentido, esta propuesta busca promover el conocimiento y las habilidades de los profesores para diseñar prácticas de instrucción de forma fundamentada y sistemática, basadas en el análisis de contenido y cognitivo (organizadores del currículum propuestos por Rico, 2013). El primero está enfocado en la organización de los significados de un contenido matemático escolar, y el segundo en las expectativas, limitaciones y demandas de aprendizaje. De manera complementaria, los resultados de la presente investigación permitirán identificar si existen cambios con lo establecido en Ávila (2019) respecto a la propuesta curricular del 2011, además de ser preámbulo de la propuesta de la nueva escuela mexicana que se implementa a partir del ciclo escolar 2022-2023.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Las fracciones se han caracterizado por presentar dificultades en su aprendizaje debidas a situaciones variadas. Aquí trabajaremos aquellas asociadas a la multiplicidad de significados, que según Rico (2013), se debe a los diferentes usos e interpretaciones que se le pueden dar a una noción matemática. Para el caso de fracciones, algunos de estos usos e interpretaciones aparecen en diferentes tareas (Figura 1).

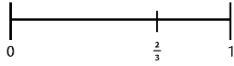
Esta multiplicidad de formas de entender las fracciones dificulta su enseñanza y aprendizaje, tal como lo muestran investigaciones como la de Quille (2019). En este estudio se identifica que el significado de la fracción que más se potencia es la relación parte-todo, donde existe una desconexión entre los términos de razón, cociente, operador y medida.

En este mismo tenor, Reyna (2020) realiza una investigación con alumnos y alumnas de quinto grado de primaria en México, y establece que algunas limitantes en el aprendizaje de las fracciones se debe al lenguaje inducido

por profesores, tales como: mitad, cuarta parte, entre otros; además de que en el manejo del contenido de fracciones se prioriza su escritura formal ($\frac{a}{b}$).

Figura 1

Ejemplos de diferentes usos e interpretaciones de las fracciones

En...	La fracción expresa:
«El espesor de una hoja es de $\frac{1}{10}$ de mm»	Una medida de longitud
« $\frac{3}{4}$ de la población vive en el campo» « $\frac{2}{3}$ de la mezcla debe ser de agua»	Una relación entre una parte y un todo (una razón)
El factor de escala del plano es de 0.0025	Un operador multiplicativo.
El número que multiplicado por 4 da 3, es $\frac{3}{4}$	Un cociente
	Un punto en la recta. Un número abstracto.

Nota. Tomado de Block (2022), p. 19–20.

También existen estudios realizados con profesores. Ríos (2019) presenta el diseño de un taller para profesores en ejercicio en Venezuela, acerca de seis significados de las fracciones (cociente, razón, parte-todo, operador, conteo y como medida). Este autor encontró que los participantes tienen dificultad para identificar el tipo de interpretación que se le da a las fracciones y las conexiones existentes entre sí para su trabajo con los alumnos, así como de qué representación utilizar para su enseñanza (oral, gráfica, aritmética, simbólica).

En este sentido, la problemática observa al profesor de matemáticas, la forma en que trabaja los significados del concepto matemático de fracciones, las representaciones, las conexiones entre sí, y cómo esta información puede ser usada para diseñar tareas de enseñanza que superen dichas dificultades.

Por tal motivo, es a través de la presente investigación que se espera brindar un referente para favorecer el diseño de tareas de enseñanza dirigidas a estudiantes de primaria para el tema de fracciones. Para ello se realizan los dos primeros análisis (Contenido y Cognitivo) del Análisis Didáctico (Rico, 2013) para el tema de fracciones basado en documentos oficiales. Lo que se espera es que estos análisis —que fueron realizados a los materiales que utiliza el profesor como referente para la planeación de sus clases— sirvan para potenciar el conocimiento didáctico mediante el diseño de tareas.

REFERENTE TEÓRICO

Para el desarrollo de la propuesta se utilizan como enfoque teórico y metodológico los dos primeros organizadores del currículum: el análisis de contenido y cognitivo, pertenecientes al Análisis Didáctico descrito en Rico (2013). Estos dos organizadores se proponen como una herramienta teórica y metodológica que puede favorecer el diseño de las tareas de enseñanza y,

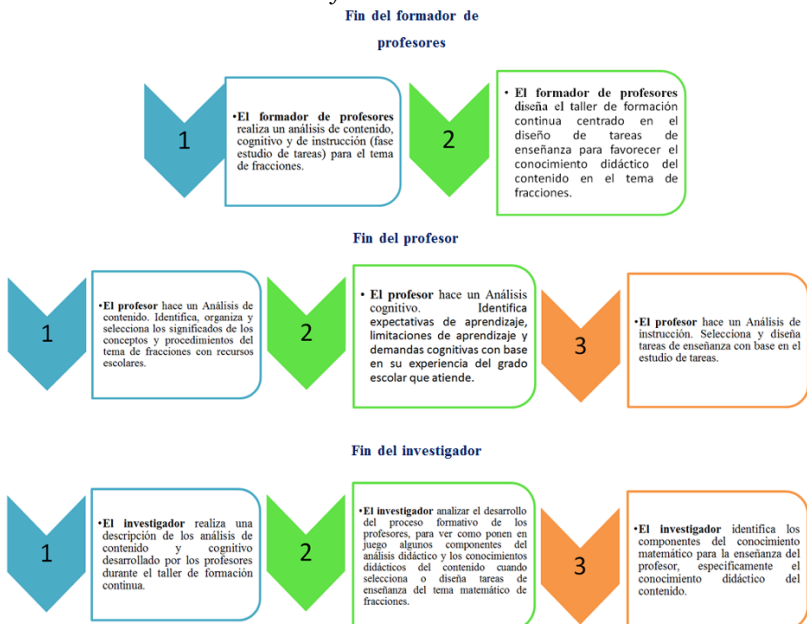
por ende, ser considerada en la formación inicial y continua de profesores de matemáticas. Según Rojas et al., (2013) estos organizadores promueven un estudio profundo del contenido escolar, permitiendo que los profesores organicen la información desde una perspectiva didáctica. Estos autores distinguen que el análisis didáctico y sus organizadores pueden tener diferentes intenciones desde la mirada de quien los realice. En esta investigación nos guiamos por tres intencionalidades o fines:

- **El del formador de profesores**, al utilizar los resultados del análisis de contenido y cognitivo para el tema de fracciones, para el diseño de un taller de formación continua para promover que los profesores diseñen tareas utilizando los primeros organizadores del análisis didáctico.
- **El del profesor**, para tomar decisiones sustentadas en la matemática educativa y ligadas a los referentes curriculares oficiales al momento de diseñar tareas para la enseñanza del tema de fracciones en el nivel primaria.
- **El del investigador**, para analizar el conocimiento didáctico del contenido que ponen en juego los profesores al momento de diseñar tareas para el tema de fracciones.

Sin embargo, por cuestiones de espacio, este reporte se centra en la intencionalidad del formador de profesores, conformada por la primera etapa de tres, tal como se presentan en la Figura 2.

Figura 2

Propuesta de fases para el diseño, desarrollo y análisis de un taller de formación continua para el diseño de tareas en el tema de fracciones



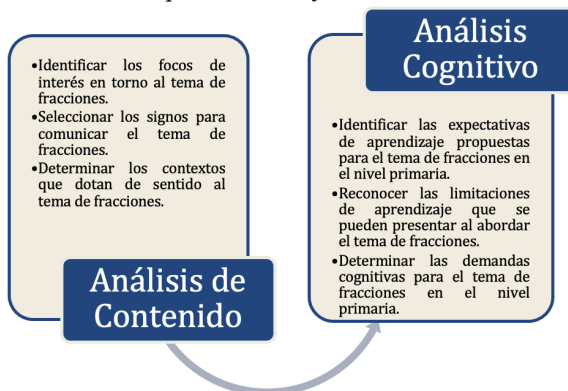
Se espera que los resultados de esta investigación sean de utilidad en el diseño, desarrollo y análisis de talleres de formación continua en el tema de fracciones, desde los dos primeros organizadores del análisis didáctico.

El objetivo de esta investigación es profundizar en el tema matemático de fracciones dentro de los que corresponden al plan de estudios 2017, que son usados como referencia por los profesores de matemáticas. Esta información fue utilizada para diseñar un taller de educación continua, donde se promueve que los profesores seleccionen los focos de interés, los signos que permiten comunicar las ideas y los contextos que dotan de sentido al contenido, brindando posibilidades de concretarlo en el diseño de tareas. Se espera que la información surgida en la primera fase y su discusión en los talleres de formación continua lleven a los profesores a la toma de decisiones previas y a la reflexión sobre cómo las aplicarán en clase, poniendo en juego su conocimiento didáctico del contenido en el diseño de tareas sobre fracciones, organizando la información que se presenta en este artículo.

De esta manera, el enfoque teórico se divide en cada uno de los organizadores del análisis didáctico aplicados en la primera fase (análisis de Contenido y Cognitivo), que tiene como objetivo contar con información que sirva de referencia para el diseño de un taller de formación continua para el tema de fracciones en el nivel primaria (Figura 3). Esta información funcionará como referente para el profesor al momento de planear o diseñar una clase para dicho contenido matemático escolar. A partir de los análisis mostrados y sus finalidades, los profesores y sus formadores tendrán los medios para diseñar y estructurar tareas de enseñanza de mejor forma. Estos análisis forman parte del trabajo previo que se propone como ideal para el diseño de tareas para un contenido matemático escolar y para la planeación de talleres de formación continua.

Figura 3

Organizadores preliminares para la planeación de un taller de formación continua centrado en el diseño de tareas para el tema de fracciones.



Así, se plantean algunas preguntas que servirán de referente a profesores y formadores para el diseño de tareas relacionadas con el tema de fracciones: ¿Qué significados del concepto matemático escolar de fracciones se pide potenciar desde el plan de estudios y desde los libros oficiales de educación primaria? ¿Qué dificultades afrontan los estudiantes de primaria al promover los aprendizajes de fracciones planteados en el plan de estudios y en los libros propuestos?

La primera pregunta se responde desde el análisis de contenido, enfocado en el conocimiento matemático que se desea enseñar, es decir, el tema de fracciones. La segunda cuestión corresponde al análisis cognitivo centrado en las expectativas y limitaciones del aprendizaje que se pueden presentar al enseñar el tema de fracciones; se tiene como foco al estudiante y, con ello, lo que podría esperar el profesor. A continuación se presenta una descripción de cada organizador y los constructos teóricos que lo conforman.

Análisis de Contenido

Se considera una herramienta para identificar y organizar los significados del contenido matemático, donde intervienen tres organizadores del currículo que utiliza Gómez (2007) para el estudio de estos significados:

- La *estructura conceptual*: conformado por conceptos, procedimientos y las relaciones entre el campo conceptual y procedimental que estructura al contenido matemáticamente.
- Los *sistemas de representación*: todas las representaciones que permiten comunicar el contenido y las operaciones entre estos signos.
- La *fenomenología*: considera los contextos, situaciones y problemas que dotan de sentido al contenido (Lupiáñez, 2009).

Estos tres organizadores curriculares enmarcan el análisis de contenido, mismo que ayudará a los profesores a organizar el contenido matemático de fracciones. A continuación se hace un desglose de los organizadores antes expuestos.

Estructura Conceptual

Se puede ver desde una perspectiva cognitiva, conformada por dos campos propuestos en Rico (1996, citado en Lupiáñez, 2009), que permite establecer conexiones entre conceptos y procedimientos; el autor propone la siguiente estructura para cada uno de ellos:

Conocimiento Conceptual. Está conformado por tres niveles:

1. *Hechos*: Pueden ser términos, notaciones, convenios y resultados.
2. *Conceptos*: Conjuntos de hechos conectados mediante relaciones.
3. *Estructuras conceptuales*: Son sistemas de conceptos.

Conocimiento Procedimental. Engloba los procedimientos y demandas al realizar tareas, se distinguen tres niveles de concreción:

1. *Destrezas*: Actúa sobre hechos.
2. *Razonamientos*: Exige un nivel mayor de conocimiento y actúa sobre conceptos.
3. *Estrategias*: Actúa sobre estructuras conceptuales.

Sistemas de Representación

Los signos y las operaciones previstas entre ellos es lo que permite comunicar el tema que se quiere enseñar. Se retoman desde la perspectiva de Kaput (1992), como se citó en Cañadas et al. (2018), p. 72, lo cual permite agrupar y clasificar en cuatro operaciones.

1. Creación y presentación de signos o expresiones. Como su nombre lo indica, es cuando se presentan por primera vez los signos relacionados con un tema, estableciendo formas válidas e inválidas de representar el objeto, tal como se explica a continuación.

Inválidas: los signos $\frac{a}{0}$ ($a \neq 0$) y $\frac{0}{0}$; el significado de estas expresiones se hace en términos de inexistencia, indefinición, imposibilidad y sin sentido. En afirmaciones justificativas en términos de división o de fracción se habla de (1) inexistencia porque la división por cero no está definida, (2) que dividir por cero no tiene sentido y (3) que es imposible realizar la operación cuando el denominador se anula.

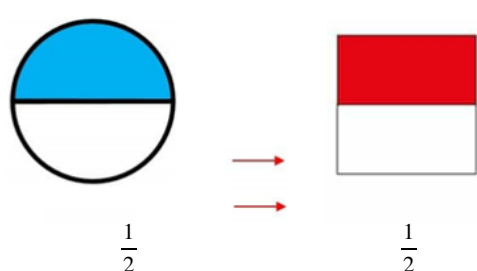
Válidas: ejemplos de expresiones válidas de las fracciones propias son: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{8}{10}$, etc.

2. Transformación sintáctica invariante. son los cambios conceptuales o procedimentales dentro de un mismo sistema, donde el objeto matemático no cambia. Un ejemplo es cuando se trabajan fracciones equivalentes como: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} \dots$

3. Transformación sintáctica variante. A diferencia de la anterior, aquí el objeto matemático sí cambia. Un ejemplo en el contexto de las fracciones es:

Figura 4

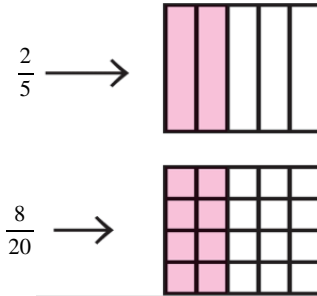
Variante Pictórica



4. Traducción entre sistemas de representación. Esta operación ocurre cuando el objeto no cambia, pero el objeto es trabajado en diferentes sistemas de representación. Un ejemplo para el caso de fracciones sería:

Figura 5

Representación numérico - geométrico



Fenomenología

La fenomenología es el componente funcional de las matemáticas, el cual permite dotar de sentido al contenido matemático escolar. Se puede categorizar en:

Contextos. Se pueden clasificar en matemáticos, no matemáticos, o como aquellos que incluyen situaciones cercanas al cotidiano del estudiante, o bien, en áreas del conocimiento extra-matemático.

Situaciones. Aquí se consideran las propuestas en PISA previas al 2012 (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos [OECD], 2013):

1. *Personales.* Relacionadas con las actividades cercanas a los estudiantes.
2. *Educativas.* Las que se manejan de manera común en el aula.
3. *Públicas.* Referentes a situaciones sociales de su entorno cercano.

Fenómenos. Conformada por un conjunto de tareas conectadas mediante la estructura conceptual del tema que se enseña.

Análisis cognitivo

Este análisis se estructura alrededor de las expectativas y competencias de aprendizaje que el profesor o las autoridades educativas esperan que se desarrollen en los estudiantes. Estos aprendizajes requieren un conjunto de conceptos y procedimientos revisados y organizados en el análisis de contenido. También se lleva a cabo una indagación de los errores y dificultades que se convierten en limitaciones del aprendizaje esperado y de los procesos de instrucción (Lupiáñez, 2009).

MÉTODOS Y MATERIALES

Para la realización del análisis de contenido y cognitivo para el tema de fracciones se revisaron documentos que conforman los principales referentes institucionales de los profesores de nivel básico en México correspondientes a la propuesta curricular del 2017. El tema de fracciones se ubicó en doce materiales para los grados de tercero a sexto de primaria, asignándoles un código para una mejor ubicación de los fragmentos analizados (Tabla 1).

Tabla 1

Documentos analizados de la SEP para el tema de fracciones y su codificación

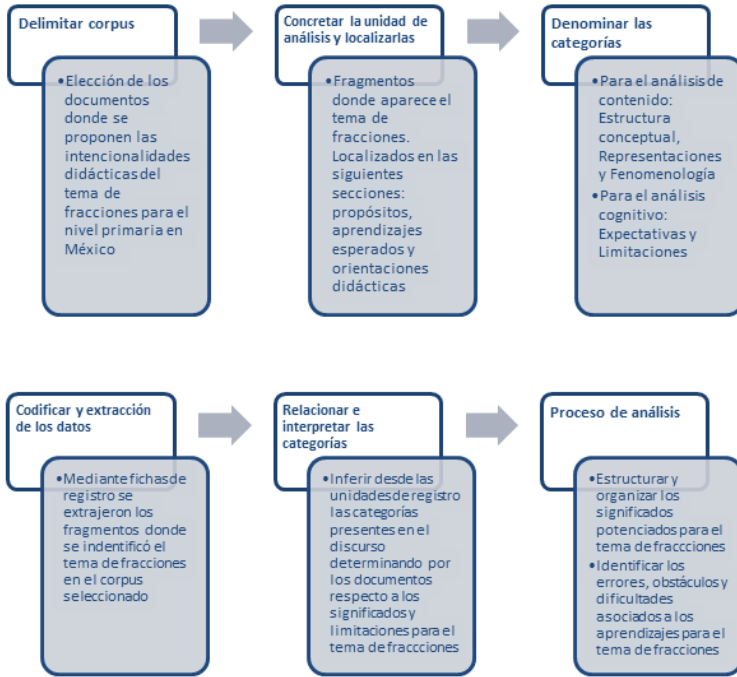
Código	Año	Título
SEP2014_DM3	2014	Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Tercer grado
SEP2014_DM4		Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Cuarto grado
SEP2014_DM5		Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Quinto grado
SEP2014_DM6		Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Sexto grado
SEP2017_AC3	2017	Aprendizajes clave para la educación integral. Educación Primaria 3°. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación
SEP2017_AC4		Aprendizajes clave para la educación integral. Educación Primaria 4°. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación
SEP2017_AC5		Aprendizajes clave para la educación integral. Educación Primaria 5°. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación
SEP2017_AC6		Aprendizajes clave para la educación integral. Educación Primaria 6°. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación
SEP2019_DA3	2019	Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Tercer grado
SEP2019_DA4		Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Cuarto grado
SEP2019_DA5		Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Quinto grado
SEP2019_DA6		Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Sexto grado

Además está la literatura especializada para el tema de las fracciones donde se reportan las principales limitaciones en su enseñanza aprendizaje. El método utilizado para la revisión de estos documentos fue el del análisis

de contenido con base en el esquema de la Figura 6, que sigue las fases propuestas por Rico y Fernández-Cano (2013).

Figura 6

Fases metodológicas del análisis de contenido



De manera complementaria, para la elección del corpus sobre los que se ejecutó el análisis de contenido y cognitivo se utilizaron tres de los cuatro niveles de concreción (*matemático escolar, prescrito, propuesto para una asignatura y de un tema en concreto*) del contenido matemático, con la intención de propiciar, como lo propone Lupiáñez (2009), una reflexión situada en el Análisis Didáctico. Aquí se analizaron los últimos tres, considerando que nos interesaba información contextualizada en el sistema educativo mexicano. De esta manera, para:

- El *contenido prescrito* se indaga, identifica y se toman las nociones básicas que los alumnos deben aprender según la propuesta curricular mexicana. Esta información se presenta en los documentos de Aprendizajes clave para la educación integral-Plan y programas de estudio y corresponden a los documentos con códigos: SEP2017_AC3, SEP2017_AC4, SEP2017_AC5 y SEP2017_AC6 (Ver Tabla 1).
- El *contenido propuesto para una asignatura*, se ubican y seleccionan los conceptos y procedimientos que se trabajan para el tema seleccionado. Lo anterior se propone en los libros de texto de Desafíos Matemáticos-

Libro para el maestro con códigos: SEP2014_DM3, SEP2014_DM4, SEP2014_DM5 y SEP2014_DM6 (Ver Tabla 1). Además de los Desafíos Matemáticos-Libro para el alumno a los que se les asignó los códigos de la Tabla 1: SEP2019_DA3, SEP2019_DA4, SEP2019_DA5 y SEP2019_DA6.

- El *contenido de un tema concreto*, se identifica y organizan los múltiples significados del tema de fracciones, seleccionando aquellos que se consideran relevantes en la enseñanza y aprendizaje del tema.

RESULTADOS

Análisis de Contenido del tema de fracciones en educación primaria

Según Rico y Fernández-Cano (2013), el análisis de contenido delimita y precisa la pluralidad y diversidad de significados de un contenido matemático escolar. Por lo tanto, para identificar dicha diversidad de significados se presentan los resultados para el tema de fracciones, consecuencia de la revisión del corpus descrito en la sección anterior.

Estructura conceptual del tema de fracciones para el nivel básico

Campo Conceptual. Está conformado por el conocimiento personal, con las estructuras matemáticas con las que se piensa. Se pueden distinguir tres niveles para el tema de fracciones:

a) Hechos:

- Términos
 - Fracciones
 - Denominador
 - Numerador
 - Relación
 - Parte-todo
 - Medida
 - Reparto
 - Equivalencia
 - Dividir en partes iguales
 - Mitad o medio
 - Proporción
- Notaciones
 - Fracciones de la forma:
 - ◆ n/m
 - ◆ $\frac{a}{b}$
 - ◆ $a/b = a \div b$
 - ◆ $\frac{m}{2^n}$

- Equivalencias básicas:
 - ♦ $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
 - ♦ $\frac{4}{4} = 1$
 - ♦ $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$
- Fracciones mixtas:
 - ♦ $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$
- Convenios
 - Numerador/denominador (a/b)
 - Razones expresadas mediante dos números naturales (n por cada m) y con una fracción (n/m).
- Resultados.
 - Suma de fracciones con mismo denominador o suma de fracciones homogéneas: el proceso consiste en sumar los numeradores, el denominador se mantiene igual: $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$
 - Suma de diferente denominador (Uso de mínimo común múltiplo)
 - Técnicas de Multiplicación y división de fracciones
- b) Conceptos:
 - Problemas de reparto
 - Aplicación en Proporcionalidad
 - Aplicación en Porcentajes
- c) Estructuras conceptuales:
 - a/b representa una división algebraica, por lo que el divisor debe ser distinto de cero ($b \neq 0$).
 - Dos fracciones a/b y c/d son equivalentes si se verifica que $a \cdot d = b \cdot c$.
 - Propiedades algebraicas de operaciones suma y producto.

Campo Procedimental. A través del análisis realizado se pueden distinguir los siguientes tres niveles de concreción:

- a) Destrezas:
- Usa fracciones con denominador dos, cuatro y ocho para expresar relaciones parte-todo, medidas y resultados de repartos.
 - Ordena fracciones con denominadores múltiplos.
 - Resuelve problemas de suma y resta con fracciones del mismo denominador (medios, cuartos, octavos, hasta doceavos).
 - Resuelve problemas de suma y resta con números naturales, decimales y fracciones con denominadores, uno múltiplo del otro.
 - Lee, escribe y ordena números fraccionarios de diferente denominador.
 - Reconoce y construye fracciones equivalentes.
 - Resuelve problemas de multiplicación con fracciones.

- Compara razones expresadas mediante dos números naturales (n por cada m) y con una fracción (n/m).
 - Calcula valores faltantes en problemas de proporcionalidad directa, con constante número natural.
- b) Razonamientos:
- Deductivo: Interpretar geoméricamente la expresión que plantea un problema.
 - Analógico: demostrar equivalencia entre la representación algebraica (simbólica) y geométrica.
 - Figurativo: uso de representaciones geométricas.
 - Comprobar en problemas de variación la aplicación de proporcionalidad y porcentajes.
- c) Estrategias:
- Utilizar de manera flexible la estimación, el cálculo mental y el cálculo escrito en las operaciones con números fraccionarios.
 - Resolver problemas en diversos contextos.
 - Uso de diferentes sistemas de representación.

Sistemas de representación

Representación numérica. La representación numérica de las fracciones está dada por símbolos, llamados números, y su representación es 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Sus expresiones $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{8}{10}, \frac{12}{7}, \frac{10}{8}, 3\frac{1}{2}$, entre otros (Cañadas et al., 2018, p.75).

Simbólico. Caracterizado por signos como letras y símbolos de las operaciones aritméticas que guardan una relación entre sí, ejemplo:

- Compara razones expresadas mediante dos números naturales (n por cada m) y con una fracción (n/m).
- Repartir 3 pasteles entre 4 niños, los alumnos han visto que $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
- Si a cada invitado se le dan $\frac{2}{5}$ de pastel, ¿cuántos pasteles se necesitan para darle esa cantidad a 5 invitados? Esto implica la multiplicación $5 \times \frac{2}{5}$, que puede llevarse a cabo mediante sumas: $\frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{10}{5} = 2$
- Si se reparte $\frac{1}{3}$ de pastel entre cinco personas:

$$\frac{1}{3} \div 5 = \frac{1}{15}$$

Tabular. Se presenta la información en las filas y columnas de una tabla de datos, ejemplo:

- En una fiesta, varios niños recibieron diferentes fracciones de pastelitos iguales. Indica para cada pareja de niños quién recibió más y cuánto más (Figura 7).

Figura 7

Representación tabular del tercer grado de educación primaria

		¿Quién recibió más?	¿Cuánto más?
Ana: $\frac{1}{2}$	Pablo: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$		
Laura: $\frac{3}{4}$	Margo: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$		
Luisa: $\frac{3}{4}$	Emilio: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$		
Inés: $\frac{4}{8}$	José: $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$		

Nota. La imagen corresponde al código SEP2017_AC3_235. Para su localización puede utilizar la Tabla 1 y el último número (235) que es la página donde se ubica.

- Si a cada invitado se le dan $\frac{2}{5}$ de pastel, ¿cuántos pasteles se necesitan para darle esa cantidad a 5 invitados? Responde la tabla siguiente (Figura 8).

Figura 8

Representación tabular del quinto grado de educación primaria

Cantidad por cada invitado	Número de invitados	Número de pasteles que se debe comprar
$\frac{2}{5}$ de pastel	1	
$\frac{2}{5}$ de pastel	5	
$\frac{2}{5}$ de pastel	10	
$\frac{2}{5}$ de pastel	15	
$\frac{2}{5}$ de pastel		30

Nota. La imagen corresponde al código SEP2017_AC5_236. Para su localización puede utilizar la Tabla 1 y el último número (236) que es la página donde se ubica.

- Si al repartir un solo pastel entre cinco personas le corresponde $\frac{1}{5}$ a cada una, entonces, al repartir cuatro pasteles entre cinco personas le corresponderá cuatro veces más a cada una, es decir, 4 veces $\frac{1}{5}$, esto es $\frac{4}{5}$ (Figura 9)

Figura 9

Representación tabular del quinto grado de educación primaria, No. 2

Entre cinco personas	
Número de pasteles	A cada una le corresponde
1	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{2}{5}$
3	$\frac{3}{5}$
—	2

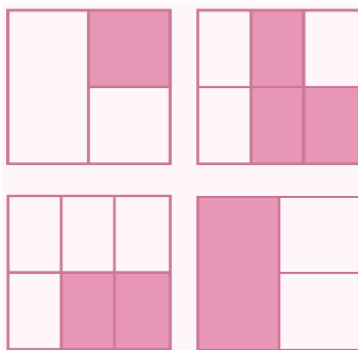
Nota. La imagen corresponde al código SEP2017_AC5_237. Para su localización puede utilizar la Tabla 1 y el último número (237) que es la página donde se ubica.

Geométrico. Representado por figuras geométricas:

- Uso de figuras con fondo blanco y con subdivisiones, pero en las que el número de subdivisiones no siempre coincida con el denominador, por ejemplo, pídale que indiquen en cuál de los siguientes cuadrados está coloreado $\frac{1}{2}$ (Figura 10).

Figura 10

Representación geométrica del tercer grado de educación primaria

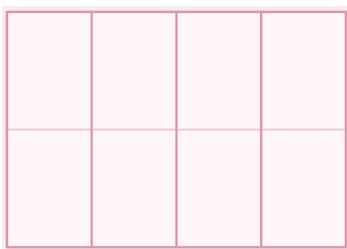


Nota. La imagen corresponde al código SEP2017_AC3_234. Para su localización puede utilizar la Tabla 1 y el último número (234) que es la página donde se ubica.

- A la inversa, pida a los alumnos que sombreen una fracción dada, por ejemplo, iluminar $\frac{1}{4}$ de la figura, o bien, sombrea de tres formas la mitad del rectángulo (Figura 11)

Figura 11

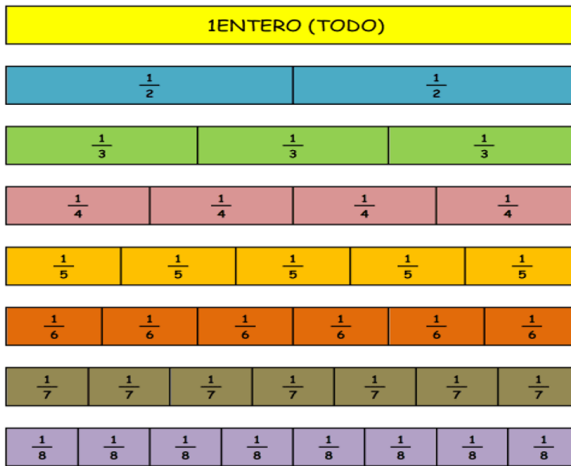
Imagen para ilustrar $\frac{1}{4}$ en tercer grado de educación primaria



Nota. La imagen corresponde al código SEP2017_AC3_234. Para su localización puede utilizar la Tabla 1 y el último número (234) que es la página donde se ubica.

Manipulativo. Representación palpable para la construcción del conocimiento, ejemplo:

- ¿Qué tira será más grande: la de $\frac{1}{3}$ de unidad o la de $\frac{3}{6}$ de unidad? Después de que los alumnos consideren el problema y propongan algunas soluciones, pídale que elaboren las tiras para verificar sus respuestas (Figura 12).

Figura 12*Uso de Tiras con fracciones*

Nota. Tomado de *tiras de fracciones* [Fotografía], por MathCenter Free Math for Everyone, Math-center (<https://bit.ly/3RhHF2L>)

Fenomenología. La fenomenología encontrada en el análisis realizado viene dada por:

Contextos: Situaciones matemáticas, no matemáticas y contextos que parten de la vida cotidiana.

Situaciones: Es una referencia del medio donde una estructura matemática tiene un uso regular, considerándose aquí las usadas en el estudio PISA previas al 2012 (OECD, 2013):

Personales. Relacionadas con las actividades diarias de los alumnos.

- Reparto de pasteles entre niños, por ejemplo, al repartir 3 pasteles entre 4 niños (fragmento con código SEP2014_DM3_235)
- Compré $1\frac{3}{4}$ kg de carne molida y $\frac{2}{4}$ kg de carne sin moler. ¿Cuánta carne compré en total?
- Se usaron $\frac{5}{8}$ partes de un listón para a hacer un moño. ¿Qué parte del listón sobró? (los dos fragmentos anteriores corresponden a SEP2014_DM4_235)

Educativas.

- Relación parte-todo. Se trata de una unidad o un todo que se divide en partes iguales, de las cuales se toman algunas. Por ejemplo, $\frac{3}{4}$ se concibe como una unidad o un todo que se divide en cuatro partes iguales y de la cual se toman tres (este fragmento pertenece a SEP2017_A-C3_233).

- Medición, reparto y como cociente.
- Uso de equivalencias
- Uso de fracciones mixtas
- Comparación de fracciones menor que, mayor que.
- Sumas y restas de fracciones.

Públicas.

- Después de la fiesta quedaron $\frac{3}{5}$ de pastel. Ana se comió $\frac{1}{5}$ del pastel y Luis lo demás. ¿Qué fracción de pastel se comió Luis? (fragmento con código SEP2017_AC3_135)
- Cálculo de porcentajes (proporcionalidad)

Fenómenos

- Orden de fracciones
- Suma y resta de fracciones
- Uso de fracciones mixtas
- Problemas de multiplicación de fracciones
- Problemas de división de fracciones
- Ubicación de fracciones en la recta numérica
- Problemas de comparación
- Problemas de reparto
- Cálculo de problemas de valores faltantes
- Fracciones para expresar una división

Análisis cognitivo del tema de fracciones en educación primaria

Expectativas de aprendizaje

Las expectativas para la educación primaria en el tema de fracciones, según el Plan y programas de estudios son:

- *Utilizar de manera flexible la estimación, el cálculo mental y el cálculo escrito en las operaciones con números naturales, fraccionarios y decimales.*
- *Identificar y simbolizar conjuntos de cantidades que varían proporcionalmente, y saber calcular valores faltantes y porcentajes en diversos contextos.*
- *Calcular y estimar el perímetro y el área de triángulos y cuadriláteros, y estimar e interpretar medidas expresadas con distintos tipos de unidad.*
- *Buscar, organizar, analizar e interpretar datos con un propósito específico, y luego comunicar la información que resulte de este proceso.*

(Fragmentos SEP2017_AC3_216).

Específicamente, el tema de fracciones se encuentra en el eje temático *Número, Álgebra y Variación*, dentro de los temas: *número; adición y sustracción; multiplicación y división; y proporcionalidad.*

Los aprendizajes esperados con respecto a las fracciones para cada ciclo escolar son:

Para tercero y cuarto de primaria

- Usa fracciones con denominador hasta 12 para expresar relaciones parte-todo, medidas y resultados de repartos.
- Resuelve problemas de suma y resta de fracciones con el mismo denominador (hasta doceavos).

Para quinto y sexto de primaria

- Lee, escribe y ordena números naturales hasta de cualquier cantidad de cifras, fracciones y números decimales.
- Resuelve problemas de suma y resta con números naturales, decimales y fracciones con denominadores, uno múltiplo del otro. Usa el algoritmo convencional para sumar y restar decimales.
- Resuelve problemas de multiplicación con fracciones y decimales, con multiplicador natural y de división con cociente o divisor naturales.
- Compara razones expresadas mediante dos números naturales (n por cada m) y con una fracción (n/m de); calcula valores faltantes en problemas de proporcionalidad directa, con constante número natural.

Limitaciones de aprendizaje

El aprendizaje de un nuevo campo numérico en educación primaria representa retos para los alumnos; en este caso, las fracciones comienzan su enseñanza formalmente en tercer grado de educación primaria y aumentan sus usos en diferentes contextos a lo largo de cada ciclo escolar.

Simón et al., (2018) atribuye tres factores a las dificultades que presentan los alumnos en su aprendizaje: enfoque orientado a la enseñanza de los números naturales en primaria, las fracciones representadas como la relación entre dos números y las distintas formas que adoptan los profesores para enseñar el tema. Simón et al., (2018, p. 3-4), dentro de su investigación, identifica cuatro tipos de limitaciones sobre la comprensión de las fracciones: ausencia de la fracción como cantidad, fracción como dos números, concepto limitado de fracción parte-todo, y la dificultad de comprender la unidad de referencia.

Ejemplo de dificultades asociadas a los significados de las fracciones

La fracción como relación *parte-todo* describe cuando una unidad o totalidad se descompone en partes iguales, donde la fracción indica una o varias de esas partes. En este significado, los alumnos aprenden a ubicar en figuras geométricas una parte sombreada correspondiente a una fracción unitaria y, posteriormente, a reconocer y tomar varias de estas partes (Sánchez, et al., 2011, p. 43). El uso de este acercamiento suele originar ideas erróneas, como el manejo de la unidad. Mack (1990), como se citó en Sánchez et al. (2011) informa en su estudio que los alumnos conocían representaciones, procedimientos y símbolos sobre las fracciones, pero no identificaban la relación entre ellos; la dificultad persistente en identificar la unidad en situaciones

representadas de manera concreta y de forma simbólica, pues en los alumnos persistía la idea de que “como las fracciones son una parte del todo, siempre son menores [que el todo]” (p. 43).

Las fracciones como *cociente* son las relaciones entre una situación de división y una fracción como representación de su cociente: El cociente de la división $a \div b$ es igual a la fracción $\frac{a}{b}$ para toda a, b en los enteros y $b \neq 0$. Comúnmente se asocia a las situaciones de reparto equitativo, sin embargo, estas situaciones no son suficientes para construir ese significado (Sánchez, et al., 2011, p. 44). En este, los alumnos dan sentido al resultado menor que la unidad porque no conciben las situaciones de reparto equitativo como un caso de división, aun cuando los alumnos pueden encontrar el cociente en términos de fracciones dividiendo una unidad (Sánchez, et al., 2011, p. 44).

En el caso de la fracción como *medida*, que es cuando se representa el número de unidades y partes de la unidad de una clase (área, volumen, longitud, etc.) que cubren o aproximan una cantidad de la misma clase (Sánchez, et al., 2011, p. 46), la dificultad se muestra al integrar una noción para medir longitudes.

Las fracciones como *operador* actúan para transformar la fracción sobre una parte, un grupo o número, logrando cambiar de un determinado estado inicial. En este caso Behr et al., (1993) argumenta que los problemas que usan las fracciones como operador suelen requerir soluciones de varios pasos:

Muchas marcas de chicles venden su producto en paquetes de 5 piezas por paquete. Juana tiene 8 paquetes. María tiene $\frac{3}{4}$ partes de lo que tiene Juana. ¿Cuántos paquetes tiene María? ¿Cuántas piezas tiene María? (p. 29)

Lo que tiene María se puede ver como una transformación de lo que tiene Juana, indicada por el número $\frac{3}{4}$; éste opera sobre los ocho paquetes.

Por último, las fracciones como *razón* parten de la comparación de dos cantidades o conjunto de unidades de diferente o similar magnitud. La dificultad radica en lograr identificar dicha relación; en el caso de problemas de valor faltante (proporcionalidad directa), los alumnos identifican que existe una relación que afecta las tres cantidades. No obstante, no tienen un método para saber cómo organizar los tres números de manera conveniente y realizar las operaciones respectivas.

Demandas cognitivas

Las demandas cognitivas son las acciones que se propone activar a través de tareas o actividades en la clase de matemáticas. La revisión se centró en las tareas dirigidas a la consecución de expectativas expresadas en las orientaciones didácticas del corpus con códigos: SEP2017_AC3, SEP2017_AC4, SEP2017_AC5 y SEP2017_AC6). Éstas tienen como objetivo favorecer el aprendizaje y superar dificultades y errores (Rico & Fernández-Cano,

2013). Es así que en el corpus analizado, conformado por las tareas relacionadas a las fracciones, se identificaron las demandas cognitivas para el nivel primaria y sus significados asociados.

De esta manera, en tercer grado de educación primaria se comienza con el trabajo formal de las fracciones y se brinda un acercamiento a los significados de medición y de reparto, no obstante, prevalece de forma implícita el significado de relación parte-todo. En cuarto grado de educación primaria se espera que los alumnos profundicen más en los significados de medición y reparto, además, se aumenta el grado de dificultad en el trabajo de los diferentes significados, incluyendo divisores de 3, 5, 6 y sus múltiplos, al mismo tiempo, se agrega el concepto de equivalencia.

Por último, en quinto y sexto grado de educación primaria se introducen los significados de operador, cociente y razón, en tanto son utilizados para resolver problemas multiplicativos de fracciones, divisiones y en la comparación de razones para la resolución de problemas de proporcionalidad, en este caso, tablas de variación. Las demandas cognitivas asociadas a los significados descritos en cada grado escolar se presentan en la Tabla 2.

Lo anterior permite nuevas oportunidades para complejizar el uso de las fracciones, hacer anticipaciones, argumentar y, de ser posible, verificar sus resultados. Los significados de operador, cociente y razón, si bien son un conocimiento complejo, se trabajan a lo largo de los últimos grados en educación primaria y de los primeros en educación secundaria.

APORTACIONES PARA LA DOCENCIA Y SU FORMACIÓN

Los resultados de la presente investigación permitirán articular el diseño de las tareas para el tema de fracciones con los contenidos matemáticos necesarios para resolverlas, así como con las dificultades asociadas a los aprendizajes establecidos en los referentes institucionales. De esta forma, el profesor podrá

profundizar más en el tipo de actuaciones que se promueve, en la diversidad de modos de solución o en su grado de dificultad. Una simple modificación del enunciado puede hacer que satisfaga los requerimientos o las finalidades que persigue el profesor en la programación (Lupiáñez, 2009, p. 69).

A propósito, el análisis de contenido y cognitivo brindan criterios para llevar a cabo tales modificaciones, potencializando el conocimiento didáctico del contenido de los profesores en el diseño de tareas de enseñanza y su consideración en talleres de desarrollo profesional.

Estas herramientas, surgidas desde la Matemática Educativa, les permiten a los profesores y formadores discernir la idoneidad de las tareas de enseñanza que diseñan y, a su vez, coadyuvar en el rendimiento escolar para el tema de fracciones.

Tabla 2*Demandas cognitivas asociados a los significados de las fracciones en educación primaria*

Grado de primaria	Significados asociados	Demandas cognitivas
Tercero	Medición	Medir longitudes. Crear nociones sobre la fracción. Establecer lenguaje no formal relacionado: cachito, pedazo, partes, porción, etc.
	Reparto	Repartir de forma equitativa mediante material concreto. Repartir de forma equitativa mediante representaciones pictóricas y geométricas.
	Relación parte-todo	Uso de figuras con subdivisiones para identificar la fracción solicitada. Sombrear una fracción solicitada.
Cuarto	Medición	Hacer uso de signos menor que (<) y mayor que (>) en situaciones que impliquen medir y ordenar cantidades con números fraccionarios. Resolver situaciones en las que no se da la unidad de referencia, pero sí la fracción, de la que debe obtenerse la unidad. Resolver problemas de suma y resta de fracciones a partir de material concreto como tramos de listón.
	Reparto	Hacer particiones aumentando el grado de dificultad en la repartición (divisores 3, 5, 6 y sus múltiplos) e incluir oportunidades para estudiar las equivalencias de varias expresiones a partir del reparto. Hacer uso de fracciones mixtas en situaciones de reparto.
Quinto	Reparto	Resolver problemas de repartos equitativos y exhaustivos.
	Razón	Comparar razones dadas para identificar fracciones equivalentes. Realizar suma de fracciones con diferente denominador a través de fracciones equivalentes.
	Medición	Comparar diferentes medidas para ordenar fracciones de menor a mayor y viceversa. Elaborar mentalmente sucesiones ascendentes o descendentes con fracciones. Ubicar números fraccionarios en la recta numérica.
	Operador	Suma repetitiva para introducir nociones de multiplicación de fracciones.
Sexto	Cociente	Hacer repartos en los que el número de personas sea fijo y a través del uso de tablas, con la intención de introducir la fracción a/b como el cociente de la división $a \div b$
	Operador	Resolver multiplicación de fracciones con algoritmo convencional.
	Cociente	Uso del algoritmo convencional de la división con fracciones.
	Razón	Resolver problemas de proporcionalidad en tablas de variación (suma término a término, valor unitario, factor constante de proporcionalidad).
	Reparto	Partir una medida expresada con una fracción, entre un número de partes.

De igual importancia, los análisis realizados permiten a los profesores seleccionar estructuras matemáticas para el trabajo del tema de fracciones en educación primaria, conceptos, sistemas de representación y fenomenología, así como los significados que desea favorecen en cada grado escolar, evitando priorizar de manera inconsciente, o por falta de conocimientos, un solo significado al abordar con menor frecuencia los demás. Trabajar con menor asiduidad determinado concepto de las fracciones pone de manifiesto una desconexión en la gradualidad de sus diferentes usos e interpretaciones, en consecuencia, las estructuras de enseñanza carecen de profundidad en la comprensión de los procesos significativos en el contexto de la didáctica, que a su vez impactan en el rendimiento escolar en las matemáticas.

Por otra parte, considerar las expectativas de aprendizaje y limitaciones para el diseño de tareas de enseñanza ayuda a los profesores a llevar a cabo un proceso de deconstrucción y reflexión para poder reconstruir y redefinir el conocimiento matemático de fracciones para su enseñanza; se considera en primera instancia el análisis de contenido, mismo que dotará de la estructura necesaria para lograr los objetivos de aprendizaje en los alumnos.

En consecuencia, se busca que los profesores conozcan nuevas maneras de desarrollar los conceptos matemáticos con la intención de lograr los objetivos de aprendizaje en los alumnos. Se propone un ciclo de enseñanza que puede ser aplicado en las aulas y que plantea estrategias para obtener resultados precisos con los cuales actuar.

CONCLUSIONES

De los resultados mostrados en el análisis de contenido destacan el uso de fracciones para expresar relaciones parte-todo, medidas, problemas de reparto, fracciones como cociente y como operador, la comparación de razones y ejercicios de proporcionalidad y porcentajes para calcular valores faltantes. Se prioriza el razonamiento deductivo para realizar inferencias entre los sistemas de representaciones, tales como: la representación numérica, simbólica, tabular, geométrico y manipulativo. Además, se impulsan estrategias como la estimación, el cálculo mental y el cálculo escrito en las operaciones con números fraccionarios, favorecido por el uso de contextos matemáticos en situaciones personales y educativas.

Del análisis cognitivo resaltamos que se espera que el alumno, a lo largo de la educación primaria, haga uso de los diferentes significados de la fracción a través de diferentes medios, expresados en el Análisis de Contenido; y que sus principales limitaciones de aprendizaje se encuentran en las conexiones que permiten hacer uso de los diferentes significados, así como identificar qué tipo de representación lo favorece.

De esta forma, podemos concluir que las innovaciones en las reformas expresadas en esta investigación residen en enriquecer los significados de las fracciones y sus usos, apoyadas de orientaciones didácticas que ayuden al

profesor a comprender cómo impulsar el aprendizaje de las fracciones, esto basado en la comparación con el trabajo de Ávila (2019). No obstante, es importante describir de qué manera los profesores utilizan los análisis de contenido y cognitivo del tema de fracciones para mejorar el diseño de sus tareas; ratificamos que es importante que el profesor logre sistematizar, categorizar y organizar el concepto matemático de fracciones para su enseñanza.

REFERENCIAS

- Alajmi, A. H. (2012). How do elementary textbooks address fractions? A review of mathematics textbooks in the USA, Japan, and Kuwait. *Educational studies in mathematics*, 79(2), 239–261. <https://doi.org/10.1007/s10649-011-9342-1>
- Ávila, A. (2019). Significados, representaciones y lenguaje: las fracciones en tres generaciones de libros de texto para primaria. *Educación Matemática*, 31(2), 22–60. <https://doi.org/10.24844/EM3102.02>
- Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1993). Rational numbers: Toward a semantic analysis emphasis on the operator construct. En T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational Numbers. An Integration of Research* (pp. 13–47). Routledge.
- Block, D. (2022). *Más de uno, pero menos de dos. La enseñanza de las fracciones y los decimales en la educación básica*. Taberna Librería Editores. <https://bit.ly/3ZaxXRK>
- Cañadas, M., Gómez, P., & Pinzón, A. (2018). Análisis de contenido. En P. Gómez (Ed.) *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 53–112). Ediciones Uniandes. <https://bit.ly/45OO4iK>
- Getenet, S., & Callingham, R. (2017). Teaching fractions for understanding: addressing interrelated concepts. En A. Downton, S. Livy, & J. Hall (Eds.), *Proceedings of the 40th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 277–284). MERGA. <https://bit.ly/3PvtZz5>
- Gómez, P. (2007). Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria [Tesis de doctorado, Universidad de Granada]. Dialnet. <https://bit.ly/3Lk86RL>
- Lupiáñez, J. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* [Tesis de doctorado, Universidad de Granada]. DIGIBUG. <https://bit.ly/3ZjU7Ba>
- Novaes, B., Berticelli, D., & Pinto, N. (2020). Guidelines on the use of teaching materials for teaching fractions in the brazilian primary course (1930–1970). *Pedagogica Research*, 5(3). <https://doi.org/10.29333/pr/8221>
- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. (2013). *The PISA 2013 Assessment Framework. Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. OECD. <https://bit.ly/44OwBxg>

- Önder, S. (2021). Content and problem analysis in Turkish and Singaporean mathematics textbooks: The case of multiplying fractions. *REDIMAT*, 10(2), 117–151. <https://doi.org/10.17583/redimat.2021.4379>
- Quille, M. Q. (2019). Análisis de una organización matemática sobre los significados asociados a las fracciones en una colección de cuadernos de trabajo de educación básica [Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. ProQuest. <https://bit.ly/43eogls>
- Reyna, K. G. (2020). *Un Acercamiento al Conocimiento de la Fracción en Estudiantes de Quinto Grado de Educación Primaria, Bajo los Significados de parte todo, Medida y Cociente* [Tesis de Licenciatura, Benemérita y Centenaria Escuela Normal del Estado de San Luis Potosí]. Repositorio becenesp. <https://bit.ly/4639Ma3>
- Rico, L. (2013). El método del análisis didáctico. *UNIÓN*, 33, 11–27. <https://bit.ly/486Virr>
- Rico, L., & Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J.L., Lupiáñez, & M. Molina (Eds.) *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Innovación Curricular y Formación de Profesores* (pp. 1–23). Comares.
- Ríos, Y. (2019). Diversas interpretaciones de las fracciones. En R. Flores, D. García, & I.E. Pérez-Vera (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 141–150). CLAME. <https://bit.ly/3Rh7RdZ>
- Rojas, N., Flores, P., y Ramos, E. (2013). El análisis didáctico como herramienta para identificar conocimiento matemático para la enseñanza en la práctica. En L. Rico, J. L. Lupiáñez, & M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en educación matemática: Metodología de investigación, Formación de profesores e Innovación curricular* (pp. 191–210). Comares.
- Sánchez, E., Hoyos, V., y López, G. (2011). Sentido numérico y pensamiento algebraico. En G. Galicia (Ed.), *Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas escolares. Casos y perspectivas* (pp. 37–48). SEP. <https://bit.ly/3Rh894z>
- Secretaría de Educación Pública. (2018). *Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes en Educación Básica*. SEP. <http://planea.sep.gob.mx/ba/>
- Simón, M. A., Placa, N., Avitzur, A., & Kara, M. (2018). Promoting a concept of fraction-as-measure: A study of the Learning Through Activity research program. *The Journal of Mathematical Behavior*, 52, 122–133. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.03.004>