La enseñanza del análisis matemático: panorama compartido

The teaching of calculus: a shared vision

Mónica Arnal-Palacián [1]
Heidy Chavira [2]
Matías Arce [3]
Juan Viramontes-Miranda [4]

Resumen
Este capítulo revisa los trabajos desarrollados en el Grupo de Investigación de Didáctica del Análisis Matemático (GIDAM), de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) y el Grupo de Trabajo Temático 5 - Enseñanza y aprendizaje del cálculo (GTT5), de la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática (SOMIDEM), así como los antecedentes vinculados a cada uno de ellos, ya sea por su trayectoria o por los investigadores asociados. Asimismo, se presentan las perspectivas futuras que pretenden desarrollarse en ambos grupos. Finalmente se exponen las semejanzas y diferencias, así como la existencia de posibles vías de colaboración.

[1] marnalp@unizar.es
Universidad de Zaragoza-IUMA (SEIEM)

[2] heidy.chavira@uacj.mx
Universidad Autónoma de Ciudad Juárez (SOMIDEM)

[3] matias.arce@uva.es
Universidad de Valladolid (SEIEM)

[4] juan.viramontes@uacj.mx
Universidad Autónoma de Ciudad Juárez (SOMIDEM)

Arnal-Palacián, M., Chavira, H., Arce, M., & Viramontes-Miranda, J. (2025). La enseñanza del análisis matemático: panorama compartido. En E. Flores-Medrano, M. Molina, I. Sandoval, & I. Polo-Blanco (Eds.), *Educación Matemática en México y España: Investigaciones y líneas de trabajo compartidas* (pp. 227–256). Editorial SOMIDEM - SEIEM. https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S2/2025/03-09

Palabras clave
Didáctica del análisis matemático, didáctica del cálculo, GIDAM, GTT5.

Abstract
This chapter reviews the work developed in the Research Group on Didactics of Mathematical Analysis (GIDAM) and the Thematic Working Group 5 - Teaching and Learning of Calculus (GTT5), as well as the background linked to each of them, both in terms of their trajectory and the researchers linked to them. The future perspectives to be developed in both groups are also presented. Finally, the similarities and differences are exposed, as well as the existence of possible ways of collaboration.

Keywords
Didactics of mathematical analysis, didactics of calculus, GIDAM, GTT5.

Introducción

En este capítulo se hace una revisión de parte del trabajo que se ha realizado en el Grupo de Investigación de Didáctica del Análisis Matemático, en adelante GIDAM, y en el Grupo de Trabajo Temático 5 - Enseñanza y aprendizaje del cálculo, en adelante GTT5, pertenecientes a la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) y a la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática (SOMIDEM), respectivamente.

Los objetivos del GIDAM son: establecer una red entre los investigadores que comparten la Didáctica del Análisis Matemático como centro de su investigación; identificar las líneas de investigación relacionadas entre los miembros del grupo, favoreciendo la comunicación, las colaboraciones y las estancias de investigación, etc.; participar activamente en los seminarios específicos de la SEIEM; y difundir las investigaciones realizadas por los distintos miembros del grupo. Para intentar alcanzarlos, existe una reunión anual durante el Simposio de la SEIEM cada mes de septiembre, que permite la presentación de trabajos en diferentes momentos de desarrollo.

Asimismo, el objetivo principal de GTT5 es impulsar la investigación en torno a la enseñanza y el aprendizaje del cálculo, considerado una de las áreas más relevantes dentro de la educación matemática, especialmente por su relevancia en los programas de estudio en los niveles medio superior y superior, así como en carreras relacionadas con la ingeniería y las ciencias exactas. A través de un enfoque desde la matemática educativa, se pretende identificar y analizar las problemáticas que enfrentan tanto docentes como estudiantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje del cálculo. Además, el grupo se propone valorar y recuperar los aportes realizados por investigaciones previas en el área, con el fin de consolidar un cuerpo teórico que sirva de base para el desarrollo de nuevas propuestas y estrategias didácticas. En este sentido, se enfatiza la importancia de construir un diálogo constante entre la práctica docente y la teoría en matemática educativa, que permita enriquecer la línea de investigación del cálculo desde una perspectiva crítica, reflexiva y contextualizada.

Las investigaciones en GIDAM se apoyan en tres pilares fundamentales: temas de contenido matemático en torno al análisis matemático (los números reales, las funciones, el infinito, la continuidad, los límites, las series, el cálculo diferencial, el cálculo integral y las ecuaciones diferenciales), los procesos matemáticos involucrados en la transición entre el pensamiento matemático elemental (PME) y el pensamiento matemático avanzando (PMA) (abstraer, analizar, categorizar, conjeturar, definir, demostrar, formalizar, generalizar y sintetizar), y los temas de desarrollo cognitivo procedentes de la distinción entre los conceptos definidos formalmente y los procesos cognitivos que los conciben (las representaciones mentales, las estructuras cognitivas, los esquemas conceptuales, la dualidad proceso-objeto, la dialéctica instrumento-objeto, el pensamiento estructural versus el pensamiento operacional, la visualización y los modelos visuales). Los niveles educativos en los que se desarrollan son tanto la educación secundaria como la terciaria (grados en matemáticas, ciencias o ingeniería, grados y másteres de formación de profesores de matemáticas).

Las investigaciones en GTT5 se focalizan en la enseñanza y aprendizaje del cálculo, desde los niveles medio superior hasta el superior en carreras de ingeniería y ciencias exactas. En el seno del grupo se busca promover un mayor acceso a las herramientas y el conocimiento del cálculo, a partir de las habilidades presentes y potenciales del profesor y el alumno. Algunos ejemplos de los temas abordados en el grupo son el pensamiento variacional, el cálculo diferencial como herramienta para resolver problemas, la enseñanza de las áreas planas a través de un enfoque multidimensional, las conexiones entre conceptos, teoremas y aplicaciones, y la interpretación y aplicación del concepto de integral definida.

Las similitudes en los temas de interés de ambos grupos son notables, aunque también pueden apreciarse ciertas diferencias. Un ejemplo es la presencia explícita en GIDAM de algunos procesos matemáticos clave propios del PMA que en los grupos de trabajo temático de la SOMIDEM quedan encuadrados en otros grupos (por ejemplo, en el grupo GTT13 de Razonamiento, argumentación y prueba en Educación Matemática). Otro ejemplo es la distinción entre cálculo y análisis matemático que considera el grupo GTT5 y que suele ser habitual al organizar la enseñanza de estos contenidos en México, estando el cálculo más orientado a las técnicas de cálculo de límites, derivadas o integrales y una comprensión instrumental (en el sentido de Skemp, 1978) de los conceptos, mientras que el análisis matemático se orienta más a desarrollar una comprensión más relacional (Skemp, 1978) de qué son esos conceptos, cómo se construyen y la justificación de reglas o teoremas vinculados con estos contenidos. Esta distinción no suele hacerse explícitamente en la organización de la enseñanza de estos contenidos en España (Ministerio de Educación y Formación Profesional, MEFP, 2022), donde tienden a usarse de forma sinónima (otra cuestión es cómo se enfoque en el aula su tratamiento).

El trabajo desarrollado en ambos grupos, así como las investigaciones de los últimos años por parte de miembros de SEIEM y SOMIDEM vinculados a las líneas de interés señaladas con anterioridad, se han tenido en cuenta para la presentación de las secciones siguientes.

Estado actual de GIDAM

Los contenidos matemáticos presentes en GIDAM en los últimos años han girado en torno a las funciones, los límites, la derivada de una función, y el cálculo integral, y hemos partido de este hecho para organizar las diferentes subsecciones de este apartado. Además, existen otras nociones matemáticas, como por ejemplo las funciones, que permiten a GIDAM establecer sinergias con el grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA) de la SEIEM. Asimismo, y dado que en la enseñanza y aprendizaje de contenidos próximos al análisis matemático se encuentra un foco en los procesos de razonar y demostrar, poniendo en juego características propias del PMA (Tall, 1991), estos también han sido incluidos en la revisión, en una subsección concreta.

Para conocer el estado del arte actual, se ha partido del trabajo ya hecho en revisiones previas como las de Azcárate et al. (2015) y Camacho-Machín (2021), y a partir de ellas se han realizado dos búsquedas bibliográficas: una de ellas de contribuciones vinculadas con las temáticas del GIDAM publicadas en las actas de la SEIEM desde 2020 y otra de artículos publicados sobre estas temáticas en revistas indexadas en las principales bases de datos (Web of Science y Scopus) desde el año 2020 y donde haya autoría de personas vinculadas con el GIDAM y su actividad. En cada contribución, hemos extraído los objetivos de investigación, marcos teóricos o conceptuales utilizados, método y principales resultados como base para el análisis y organización de la revisión. Esta se presenta a continuación, pudiendo usar otras referencias relevantes que sirvan de antecedente de la información o los resultados presentados en cada caso.

En global, esta revisión bibliográfica realizada evidencia que los marcos teóricos utilizados en GIDAM son variados. Esto también, como comenta Camacho-Machín (2021), ha permitido un fortalecimiento progresivo de marcos teóricos y conceptuales fruto de las diferentes investigaciones. Algunos de los marcos teóricos utilizados han sido: APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema, Arnon et al., 2014), EOS (Enfoque Ontosemiótico, Godino et al., 2007), análisis didáctico (Rico et al., 2013), professional noticing (Jacobs et al., 2010; Llinares, 2016), fenomenología (Freudenthal, 1983), la teoría de representaciones semióticas (Duval, 2017) y la teoría extendida de conexiones matemáticas (Dolores-Flores & García-García, 2017). Incluso se han desarrollado sinergias entre teorías, como EOS y APOE para el caso particular de la derivada (Font et al., 2016).

En los trabajos que han formado parte de esta revisión bibliográfica predominan diseños de investigación con un paradigma cualitativo. Tienen una presencia muy importante investigaciones basadas en el análisis de producciones de los estudiantes para resolver tareas, aplicando metodologías de análisis de contenido. Estos datos se complementan en ocasiones con entrevistas o grabaciones a los participantes, que posibilitan análisis en mayor profundidad, con enfoques más próximos a estudios de caso. Es importante resaltar que, en algunos casos, esta recogida de datos se produce como parte de experimentos de enseñanza para mejorar el aprendizaje de los diferentes objetos matemáticos (en estudiantes) o el desarrollo de competencias profesionales (en docentes en formación). Investigaciones de este tipo han incrementado su presencia (Camacho-Machín, 2021), y favorecen una transferencia progresivamente más directa al aula del conocimiento generado. Por último, encontramos también investigaciones centradas en el análisis de libros de texto, desde el siglo XIX hasta la actualidad, o de documentos curriculares vinculados con la derivada.

En este capítulo se destaca que buena parte de las investigaciones presentadas en esta sección comenzaron con tesis doctorales dirigidas o realizadas por miembros de la SEIEM. Sin pretender olvidar ninguna, a continuación, se indican, por orden cronológico, las defendidas en los últimos 15 años recogidas en la web de la SEIEM: Javier Claros, Mario Porres, Teresa Sánchez, Luis Pino-Fan, Joan Pons, Carmen Aranda, José Antonio Fernández, Laura Conejo, Mauro Mira, Matías Arce, Astrid Cuida, Claudio Fuentealba, Abilio Orts, Luis Vidal, Mónica Arnal, Yosenith González y Gabriela Calderón.

A continuación, se presentan subsecciones que permitan presentar las investigaciones sobre el concepto de límite, derivada de una función, cálculo integral, otras nociones estrechamente vinculadas al análisis matemático, y procesos matemáticos clave en la didáctica del análisis matemático.

Investigaciones sobre el concepto de límite

Ya son casi 50 años en los que se han venido realizando numerosos trabajos estrechamente vinculados a la noción de límite que han permitido profundizar en las dificultades que se presentan en el aula desde distintos puntos de vista. Esto tampoco ha sido ajeno para la SEIEM. En estas primeras líneas destacamos algunos de los estudios en los que se fundamentan los trabajos recientemente elaborados o todavía en curso. Algunos de ellos se fundamentan en estudios anteriores, como por ejemplo el análisis de libros de texto (Sierra et al., 1999), las concepciones de los alumnos de bachillerato sobre el límite funcional y la continuidad (Sierra et al., 2000) y los fenómenos que organiza la noción de límite (Claros et al., 2007).

Precisamente tomando como punto de partida este último trabajo, y tomando como marco teórico la fenomenología, entendida en el sentido dado por Freudenthal (1983), que organiza la noción de límite, se han desarrollado tres líneas de trabajo que han tenido lugar dentro del mismo equipo de investigación y que comenzaron con las tesis doctorales de sus componentes. En primer lugar, se desarrollaron los trabajos sobre el límite finito de una sucesión y el límite finito de una función en un punto (Claros et al., 2016). Dado el estudio de manera particular para cada tipo de límite que en estos trabajos se promueve, más recientemente se han estudiado los fenómenos organizados por el límite finito de una sucesión (Arnal-Palacián et al., 2020a) y el límite infinito de una función en el infinito (Arnal-Palacián, 2022). La primera fase de estas investigaciones comienza de manera similar: caracteriza los fenómenos intuitivos y formales organizados a partir de cada uno de estos límites. Posteriormente se han realizado diferentes estudios empíricos que han considerado tanto a los libros de texto como al profesorado en formación. En relación con los libros de texto, Claros et al. (2016), Arnal-Palacián et al. (2020b) y Arnal-Palacián et al. (2024) abordan una investigación documental de carácter exploratorio y descriptivo de libros de texto desde el siglo XIX hasta la actualidad. En el primer estudio, se tomaron 40 libros de texto para analizar el límite finito de una sucesión y el límite finito de una función en un punto. Entre los resultados se muestran cómo algunos periodos temporales se caracterizan por un enfoque formal mientras que en otros se abordan estas nociones desde una perspectiva más intuitiva. En el segundo estudio se analizaron libros de texto teniendo en cuenta el límite infinito de una sucesión, pudiendo así completar el estudio anterior. Se identificaron los fenómenos anteriormente descritos en diferentes sistemas de representación. Además, entre otros resultados de este trabajo, se refleja cómo los diferentes periodos legislativos en España afectan al enfoque que se promueve (formal o intuitivo), la presencia o ausencia de definiciones y/o ejemplos, y la manera en que la noción de límite es presentada. En el tercer estudio, se abordó el análisis de 27 obras del siglo XIX, momento en el que tuvo lugar la formalización del límite. Entre los resultados de este trabajo se aprecia una clara tendencia a incluir el límite en obras de aritmética y álgebra, alejado de la percepción actual de ubicarlo en el análisis matemático.

Dada la importancia del concepto de límite en el currículo español de Bachillerato, correspondiente a la etapa comprendida entre los 16 y los 18 años, Fernández-Plaza et al. (2015) abordaron una investigación sobre los razonamientos basados en el concepto de límite finito de una función en un punto. Para ello, analizaron las concepciones que los estudiantes de educación secundaria postobligatoria tienen sobre el concepto de límite finito de una función en un punto a partir de su representación gráfica. Previamente, este mismo equipo de investigación (Fernández-Plaza et al., 2013) había descrito e interpretado las definiciones aportadas por este mismo tipo de alumnado. Entre los resultados obtenidos resaltaron la riqueza del significado de estas definiciones y su consideración dual como objeto y proceso. Recientemente, y dando continuidad a este trabajo, González-Flores et al. (2021, 2024) analizan los significados que atribuyen estudiantes de primer curso universitario, durante y al finalizar el proceso de enseñanza, al límite en un punto de una función real de variable real.

Asimismo, la investigación en educación matemática ha puesto de manifiesto la necesidad de examinar cómo los futuros profesores de secundaria abordan el pensamiento matemático de los que serán sus futuros estudiantes. En este sentido, Fernández et al. (2024) se fundamentan en la conceptualización del professional noticing establecido por Jacobs et al. (2010): atender a las estrategias, interpretar la comprensión y decidir cómo responder. Asimismo, esta investigación se apoya en la importancia del conocimiento de los futuros profesores sobre el pensamiento de sus futuros estudiantes en términos de anticipación de las respuestas que puedan producirse (Fernández et al., 2018; Llinares et al., 2016). Durante la misma, elaboraron un módulo de enseñanza para que los futuros docentes aprendan a identificar las características de la comprensión de los estudiantes sobre el límite de una función en un punto y a proporcionar decisiones instructivas que ayuden a los estudiantes a progresar en su comprensión. Con la aplicación de este módulo, identificaron un cambio en la manera en la que los futuros docentes conciben la comprensión del concepto de límite y un cambio en las decisiones instructivas. Utilizando este mismo marco teórico, professional noticing, y apoyado en el conocimiento didáctico del contenido del formador de docentes (MTEPCK), Pérez-Montilla y Arnal-Palacián (2023) analizaron la habilidad para comprender e interpretar las estrategias por parte de futuros docentes en dos tareas en las que aparecía el límite finito de una función en el infinito y el límite infinito en un punto. Esto dio lugar a la identificación de tres posibles niveles de desarrollo en relación con las representaciones semióticas: desde aquellos que solamente hacen comentarios valorativos sobre la corrección de la tarea hasta aquellos que identifican tratamientos y conversiones entre registros de representación.

Las tecnologías no han sido ajenas al desarrollo de la enseñanza y el aprendizaje de este objeto matemático. Barreras et al. (2022) y Dubarbie-Fernández et al. (2025) analizaron la idoneidad didáctica de applets de

GeoGebra para la enseñanza del límite de una función. Para ello, utilizaron como marco teórico el EOS, considerando los seis tipos de objetos matemáticos primarios que permiten describir la actividad matemática. Asimismo, se apoyaron en los trabajos de Tall y Vinner (1981) y Przenioslo (2004) para poder utilizar como variable de análisis la imagen conceptual, así como en los de Blázquez y Ortega (2001) para la categorización de los registros de representación.

Investigaciones sobre la derivada de una función

La derivada de una función sigue teniendo una importante presencia entre las investigaciones en Didáctica del Análisis Matemático, por su importancia y sus numerosas aplicaciones para el análisis de modelos matemáticos y el estudio de su evolución y cambios. No en vano, el desarrollo histórico de las ideas relacionadas con el cálculo de derivadas (tangentes, máximos, mínimos) fue el que condujo al concepto de límite (Ortega y Sierra, 1998), tratado en el apartado anterior.

Tradicionalmente, las investigaciones sobre la derivada en el grupo GIDAM se han desarrollado desde un enfoque mayoritariamente cognitivo, buscando conocer y caracterizar cómo se desarrolla la comprensión de la derivada o cuáles son las concepciones de los estudiantes sobre ella (Sánchez-Matamoros & García, 2015), teniendo en cuenta la dificultad que presenta el aprendizaje de este concepto para el alumnado (Sánchez-Matamoros et al., 2008). En estos últimos años, ha continuado la especialización en estas líneas de investigación, pero también se ha combinado con dos focos que van ganando progresivamente mayor presencia:

- La atención hacia los procesos clave en matemáticas (National Council of Teachers of Mathematics, NCTM, 2000), que se han constituido como ejes de las competencias específicas en matemáticas en el actual currículo español de la LOMLOE (MEFP, 2022).
- La transferencia a la formación inicial de docentes del conocimiento desarrollado sobre el aprendizaje de la derivada, y la caracterización de ese desarrollo profesional en docentes en formación inicial.

La derivada de una función comienza a estudiarse en España en Bachillerato, continuando su estudio en muchos grados universitarios vinculados con matemáticas, ciencias e ingenierías. Esto se refleja en que el alumnado participante es, o bien alumnado de Bachillerato, o bien alumnado universitario de matemáticas o de diversas ingenierías. También hay estudios centrados en la formación inicial de tipo didáctico para docentes de matemáticas de educación secundaria, que en España tiene lugar en un máster profesionalizante.

La trayectoria de investigación de varios miembros activos en la trayectoria de GIDAM, como Carmen Azcárate, Vicenç Font, Mar Moreno, Edelmira Badillo o Gloria Sánchez-Matamoros, ha estado vinculada con el aprendizaje de la derivada (o de las ecuaciones diferenciales), generando trayectorias fructíferas y líneas de investigación que continúan desarrollándose. Como indican Sánchez-Matamoros et al. (2008), un aprendizaje sólido de la derivada requiere comprender y relacionar las diferentes interpretaciones de la misma (como límite del cociente incremental y como pendiente de la recta tangente a una curva), normalmente asociadas a diferentes sistemas de representación de la función (analítica en el primer caso, gráfica en el segundo), así como diferenciar su carácter puntual (derivada en un punto) del global (función derivada como un nuevo objeto) y manejar adecuadamente el cálculo de derivadas, especialmente la regla de la cadena. Las investigaciones relacionadas con la derivada en GIDAM profundizan en algunos de estos aspectos.

Un primer aspecto relevante es que los propios documentos curriculares o recursos ampliamente utilizados, como los libros de texto, recojan toda esa variedad de interpretaciones y aplicaciones de la derivada. Galindo-Illanes y Breda (2022) analizan, con el apoyo del marco EOS, el significado pretendido para la derivada en ocho programas de asignaturas de cálculo en carreras de Ingeniería Comercial en Chile, encontrando diferencias en el significado que se prepondera (derivada interpretada como razón de cambio o como pendiente de la recta tangente) y en los campos de problemas de aplicación de la derivada que se abordan. Vargas et al. (2020a, 2020b) identifican los significados (entendidos en el sentido del análisis didáctico de Rico et al., 2013) de la derivada que ponen de manifiesto libros de texto de 1.º de Bachillerato (16-17 años) a través de las tareas que plantean, observándose un claro predominio de tareas algorítmicas, de un sistema de representación simbólico y de aplicaciones en contextos meramente matemáticos.

Además de lo anterior, el docente de matemáticas también ha de ser consciente y manejar con solvencia las interpretaciones y aplicaciones de la derivada. Sin embargo, Badillo et al. (2011) ya pusieron de manifiesto algunas inconsistencias en docentes de matemáticas en ejercicio al manejar la función derivada como un objeto global. Vargas et al. (2023a) han detectado cinco perfiles en el profesorado de educación secundaria en formación inicial según el significado de la derivada en un punto que explicitan en un cuestionario semántico, mostrando en general solo un dominio parcial de esta. Dificultades en este dominio del conocimiento matemático pueden ser un obstáculo para desarrollar las competencias docentes de identificar los elementos matemáticos e interpretar las características de la comprensión de la derivada que ponen de manifiesto los estudiantes, competencias que, como muestran Sánchez-Matamoros et al. (2019), son fundamentales en la propuesta de acciones docentes adecuadas para promover el avance en la comprensión conceptual de la derivada por los estudiantes.

La introducción de la derivada suele hacerse en las aulas tras haber trabajado el concepto de límite de una función, en muchos casos con una presencia importante del sistema de representación simbólico y un enfoque procedimental, que se refuerza aún más en los registros de las clases que toma el alumnado (Arce et al., 2016). Propuestas didácticas como las de Azcárate et al. (1996), que proponen la introducción de la derivada apoyándose en el contexto de la velocidad media e instantánea y la pendiente de la recta tangente, ayudarían a conectar los sistemas simbólico y gráfico y a dar sentido a la derivada fuera del contexto matemático. Esto último no es sencillo, pues como muestran Bermejo-Luna y Sánchez-Matamoros (2022), a partir de la propuesta de tareas sobre la derivada en un contexto de cinemática, tener un buen desarrollo del esquema de la derivada (en el sentido del marco APOE) es lo que permite la transferencia de ese conocimiento al contexto físico.

El establecimiento de una interpretación adecuada y de conexiones entre los registros analítico y gráfico, y entre las interpretaciones de la derivada, son claves en el desarrollo de la comprensión de la derivada. Por ejemplo, Orts et al. (2018) destacan la relación entre los registros analítico y gráfico a través de una concepción leibniziana de la recta tangente (como recta que mejor aproxima a la función en un entorno del punto) como clave en la comprensión de la recta tangente. Los trabajos de Gloria Sánchez-Matamoros han sido continuados por Claudio Fuentealba, refinando los niveles inter, intra y trans de desarrollo del esquema de la derivada a través de diferentes subniveles (Fuentealba et al., 2019) y avanzando en la caracterización de la tematización de la derivada (es decir, cuando la función derivada se convierte en un objeto sobre el que aplicar nuevas acciones o procesos), a través de tareas que provocan la reestructuración de ese esquema de la derivada y la aplicación de acciones sobre él (Fuentealba et al., 2022). El trabajo de Trigueros et al. (2024) continúa la caracterización de esta tematización, a través del análisis de las actuaciones de graduados en matemáticas al resolver problemas complejos que involucran el manejo de derivadas de orden superior en un contexto gráfico.

Las conexiones que realizan los estudiantes universitarios de matemáticas al resolver problemas vinculados con la derivada son el foco de los trabajos de Rodríguez-Nieto et al. (2023a, 2023b), en los que se articula el marco EOS con la teoría extendida de las conexiones matemáticas para identificar y analizar esas conexiones, en un caso asociadas a un problema de lanzamiento de un proyectil y en el otro al dibujo e interpretación de la función derivada f' a partir de la representación gráfica de f y viceversa. En este último caso (Rodríguez-Nieto et al., 2023b), se destaca la reversibilidad existente entre las gráficas de f y f' de forma bidireccional como aspecto clave, pero cuyo desarrollo es complejo por la cantidad y variedad de conexiones necesarias para establecerla. Otro ejemplo importante de articulación de marcos se muestra en Borji et al. (2021), en el que se articulan los marcos APOE y EOS para caracterizar la comprensión de estudiantes universitarios al resolver ejercicios de derivación implícita.

Destacamos en esta última parte investigaciones sobre la derivada de una función en las que tiene una presencia importante el rol de TIC específicas, como los programas de geometría dinámica o calculadoras simbólicas. Galindo-Illanes et al. (2022) muestran los resultados positivos de un experimento de enseñanza de la derivada con estudiantes universitarios de ingeniería, especialmente en lo relativo a la conceptualización de la recta tangente y su relación con la derivada. En un nivel educativo más bajo (1.º de Bachillerato), Lillo et al. (2023) implementan otro experimento de enseñanza sobre la construcción de la gráfica de la función derivada con actividades apoyadas en applets de GeoGebra. Estos autores identifican dos características determinantes para pasar de una comprensión de la gráfica de f' como proceso a objeto: el conocimiento del proceso límite de la tasa de variación media y la reflexión sobre la relación actividad-efecto al usar GeoGebra. Recientemente, Santos-Trigo et al. (2024) han planteado una reflexión teórica en la que, partiendo de las dificultades que muestran los estudiantes al comprender las ideas fundacionales del cálculo y los problemas que involucran cálculo variacional, se discuten las posibilidades que ofrece la resolución de estos problemas a través de programas de geometría dinámica para profundizar en la comprensión de los conceptos y obtener nuevos caminos de pensamiento para abordar y resolver estos problemas.

Investigaciones sobre el cálculo integral

El cálculo integral se encuentra en la legislación educativa española en el segundo curso de Bachillerato (17-18 años). Esta legislación determina que debe impartirse la integral definida como el área bajo una curva y técnicas elementales para el cálculo de primitivas, así como técnicas que permitan la aplicación del concepto de integral a la resolución de problemas. A pesar de esta importancia curricular, la investigación realizada desde la SEIEM, y en particular en GIDAM, no es tan abundante como para el límite y la derivada. Entre los estudios que han promovido la investigación sobre el cálculo integral se encuentran los trabajos de Ortega y Porres-Tomé (2016), Aranda y Callejo (2017) y, más recientemente, Esteve-Blasco et al. (2024). Los resultados de estas investigaciones se resumen a continuación.

Con el uso de herramientas tecnológicas, Ortega y Porres-Tomé (2016) presentaron una investigación sobre la comprensión de una integral definida y el teorema fundamental del cálculo, considerando fundamental el dinamismo de las sumas finitas de Darboux con un número escaso de sumandos. Para ello, se apoyaron en la herramienta tecnológica DERIVE, permitiendo que el trabajo simultáneo de los registros de representación numérico y gráfico fuese el paso previo a la generalización y la sistematización tanto de la integral definida como del teorema fundamental del cálculo. Por su parte, Aranda y Callejo (2017) identificaron cómo los estudiantes de Bachillerato construyen el concepto de integral en un estudio empírico utilizando applets, diseñando una trayectoria hipotética de aprendizaje. Entre los resultados arrojados por este estudio se encuentra que el concepto de función integral puede ser utilizado para diseñar materiales curriculares apoyándose en el razonamiento covariacional.

En los últimos años, Esteve-Blasco et al. (2024) han contribuido al cálculo integral desde la historia de la matemática. Dentro de GIDAM presentaron un taller en el que expusieron el método de exhausción, así como diferentes actividades en las que se abordaron los siguientes aspectos: los inconmensurables pitagóricos (perspectiva corpuscular), la divisibilidad y "llenado" del espacio: Paradojas de Zenón, y la contraposición entre infinito potencial e infinito actual. Posteriormente, con una metodología de ingeniería didáctica, este equipo de investigación ha utilizado las series de diferencias de Leibniz para comprender el concepto de integral como un proceso de suma infinita de diferencias infinitamente pequeñas utilizando la historia para obtener un conocimiento profundo del concepto y dotar a los estudiantes de un conocimiento de integral definida a partir de una aproximación por módulos.

Investigación sobre otras nociones estrechamente vinculadas al análisis matemático

Las investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las funciones se desarrollan en paralelo por miembros de SEIEM que participan tanto en GIDAM como en el grupo PNA. En el caso de la investigación de Vargas et al. (2023b), se enfocaron en caracterizar un conjunto de tareas sobre funciones propuestas por profesores en formación. Analizaron aspectos de contenido matemático y su significado, y entre los aspectos de aprendizaje o cognitivos observaron una dificultad para plantear este tipo de tareas, además de un predominio de la representación simbólica y tareas con baja demanda cognitiva. Asimismo, Inglada et al. (2023), utilizando como marco teórico el EOS, analizaron la reflexión de profesorado en formación sobre su práctica docente cuando abordan el tema de funciones en su Trabajo Fin de Máster.

Por otra parte, Arce y Conejo (2021) examinaron los procesos de enseñanza y aprendizaje de los intervalos de la recta real en libros de texto, editados durante dos leyes educativas españolas. Los resultados determinan que aparecen algunos comportamientos globales que podrían llegar a comprometer la riqueza y variedad de oportunidades de aprendizaje de las conversiones provistas, y una frecuencia de aparición muy desigual entre unas conversiones y otras, además de la falta de consideración del registro verbal y el abuso de expresiones algebraicas y verbales. Estos mismos autores, en el seno de GIDAM, presentaron un taller sobre el tratamiento de los intervalos en libros de texto y la generación de un instrumento que permitiera analizar la presentación de este contenido.

Además, Martín-Barcala y González-Astudillo han desarrollado investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del logaritmo. Estos autores han detectado errores habituales en estudiantes de enseñanza secundaria relacionados con el uso de una definición distorsionada de logaritmo o la generalización inadecuada de sus propiedades (Martín-Barcala y González-Astudillo, 2019). Estos mismos autores, en el seno del GIDAM, presentaron un taller donde expusieron una investigación en la que se pretende determinar si una enseñanza del logaritmo que contemple más definiciones, además de la inversa de la exponencial, favorece la comprensión y el aprendizaje de los alumnos.

Otros conceptos matemáticos abordados han sido el aprendizaje sobre la densidad numérica (Suárez-Rodríguez & Figueras, 2022; Suárez-Rodríguez & Sacristán Rock, 2002), y las sucesiones numéricas (Bajo-Benito et al., 2023), en las que se trata de caracterizar el desarrollo de la comprensión de las sucesiones numéricas en estudiantes de enseñanza secundaria a partir de las conversiones entre diferentes representaciones del concepto matemático.

Procesos matemáticos clave en la didáctica del análisis matemático

La influencia de los estándares del NCTM (2000) ha provocado que procesos matemáticos fundamentales al hacer matemáticas, como la resolución de problemas, el razonamiento y la prueba, las conexiones (intramatemáticas y extramatemáticas), y la representación y la comunicación de ideas matemáticas, se hayan constituido como ejes de las competencias específicas en matemáticas del actual currículo español de la LOMLOE (MEFP, 2022). Su importancia progresivamente mayor ha aumentado la presencia de investigaciones con un foco específico en estos procesos, aunque algunos como la representación de ideas matemáticas, las conexiones o la resolución de problemas han sido muy importantes en investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de tópicos propios del análisis matemático, y continúan en auge como ponen de manifiesto los epígrafes previos.

Complementaremos lo anterior con una breve revisión, en este apartado, de investigaciones recientes con foco en los procesos de razonar y demostrar y con contenidos próximos al análisis matemático, que requieren poner en juego características propias del llamado pensamiento matemático avanzado (Tall, 1991), uno de los pilares que describe GIDAM. En GIDAM han tenido presencia investigaciones que han analizado la presencia en libros de texto de procesos de demostración al abordar temas de análisis matemático, al ser un recurso con una alta influencia en lo que se realiza en las aulas. Con el antecedente de las investigaciones de Laura Conejo (ver Conejo y Ortega, 2014; Conejo et al., 2015), que evidenciaban la disminución paulatina en libros de texto españoles de Bachillerato de demostraciones deductivas al trabajar los teoremas de límites y continuidad, y su sustitución por ejemplos gráficos con funciones particulares; en la actualidad se han desarrollado investigaciones como las de Milanesio y Markiewicz (2023) o Milanesio y Burgos (2024). Estas autoras muestran la existencia de algunos conflictos semióticos potenciales que se pueden plantear al trabajar con libros de texto, como el uso no diferenciado de múltiples términos asociados a la demostración (probar, demostrar, justificar, comprobar, estudiar) al abordar los teoremas de continuidad de una función, o conflictos semióticos al abordar una demostración por inducción matemática.

Son relevantes también las investigaciones sobre las concepciones que tiene el alumnado y el profesorado sobre estos procesos, por su complejidad y por su importancia para construir matemáticas. En Camacho-Machín (2021) se recogen los resultados principales de una investigación con alumnado universitario de 1.º de los grados de Matemáticas y Física, que muestra una preferencia por justificaciones de tipo deductivo-simbólico, por considerarlas más claras y rigurosas, y una mayor resistencia hacia justificaciones basadas en argumentos visuales o gráficos. Entre el profesorado, Arce et al. (2019) muestran la existencia de perfiles muy distintos según el rol y funciones que asignan profesores de España y Portugal a la demostración en las aulas de matemáticas de Educación Secundaria y Bachillerato (12-18 años), que tienen incidencia en las prácticas vinculadas al razonamiento y la demostración que se plantean. La presencia de estas prácticas también puede estar influenciada por el conocimiento de estas que tenga el profesorado. Como muestran Vargas et al. (2020c) en un estudio con profesores en formación de matemáticas de Educación Secundaria, en ocasiones hay dificultades para construir argumentos válidos en enunciados sobre la derivabilidad de una función en un punto, al recurrirse a enunciados o reglas sin respaldo o por no tener en cuenta las condiciones necesarias para que una función sea derivable.

Otra línea de trabajo desarrollada muy recientemente, y vinculada con el razonamiento y prueba, es la de Fernández-León et al. (2021), Fernández-León y Gavilán (2022) y Gavilán y Fernández-León (2023). Estos autores, a partir de la adaptación de los conceptos de matematización horizontal y vertical que realizan Rasmussen et al. (2005), y a través de estudios de caso con una investigadora en análisis matemático como informante, caracterizan las actividades desarrolladas por esta matemática profesional al conjeturar y demostrar nuevos resultados. Se destaca el rol e importancia en estas prácticas de los ejemplos, y en concreto de los ejemplos genéricos, para facilitar la transición entre lo empírico y lo deductivo. Avanzar en esta caracterización es una fuente de información importante para el diseño de una instrucción adecuada vinculada a la enseñanza y aprendizaje de estos procesos.

Líneas futuras de GIDAM

El desafío inmediato del grupo GIDAM es la consolidación de las investigaciones en curso, así como la apertura a otras nuevas líneas que permitan su revitalización. Para ello, además de la reunión anual durante el Simposio de la SEIEM, se pretende dinamizar e impulsar la actividad del grupo con la recuperación, después de diez años, de un encuentro intermedio que permita ser un espacio no solo para la difusión de los trabajos sino también de formación de grupos de discusión y equipos de colaboración. Este primer paso ha tenido lugar durante el año 2025, y se espera su fortalecimiento en años venideros.

Aunque es difícil predecir la aparición de nuevos estudios de investigación, se espera que los trabajos más recientes expuestos en el apartado anterior tengan una continuidad y profundización en aspectos afines a los ya presentados. Asimismo, se espera que esta revisión favorezca el desarrollo de futuras sinergias entre los diferentes equipos de trabajo.

Así, y siguiendo el orden de la sección anterior, en relación con los límites, se espera que la tesis doctoral de Yosenith González, dirigida por Juan Francisco Ruiz-Hidalgo y Ana Belén Montoro, continúe ahondando en los significados del límite atribuidos por estudiantes universitarios. Asimismo, que los trabajos recientes de Mónica Arnal-Palacián y Andrés Pérez-Montilla prosigan con el estudio del profesorado en formación en relación con las imágenes conceptuales de diferentes tipos de asíntotas. Además, es esperable que el equipo formado por Álvaro Barreras, Luis Dubarbie-Fernández y Antonio M. Oller-Marcén continúe con el estudio del uso de GeoGebra en la enseñanza del límite.

Vinculado a las líneas de futuro de la noción de derivada, se confía que, dados los múltiples y recientes trabajos en dos equipos de investigación, formados por Camilo Rodríguez-Nieto, Flor Rodríguez-Vásquez, Vicenç Font y Luis Pino-Fan, y por Fernanda Vargas, José Antonio Fernández-Plaza y Juan Francisco Ruiz-Hidalgo, estos trabajos permitan seguir con un fortalecimiento de los marcos teóricos EOS y análisis didáctico, respectivamente.

Con los recientes trabajos de Miguel Esteve-Blasco, M. Teresa González-Astudillo y Miguel Ángel Fuertes-Prieto presentados en la SEIEM, y citados con anterioridad, sobre sumas y diferencias de Leibniz se espera una nueva línea de investigación que permita trabajar la enseñanza y aprendizaje de la integral.

Aportando a otro de los pilares fundamentales de GIDAM, los procesos matemáticos, se confía en una continuidad del equipo de trabajo formado por José Mª Gavilán y Aurora Fernández-León, en el que se prosiga con la caracterización sobre cómo conjeturan y demuestran los investigadores de matemáticas.

Finalmente, y dada la exposición de talleres o presentaciones de estudios en curso en GIDAM durante el Simposio de la SEIEM en los últimos años, se esperan nuevos resultados de la tesis doctoral en curso de Antonio Martín-Barcala, dirigida por Teresa González-Astudillo, sobre la enseñanza del logaritmo; de la tesis doctoral en curso de Ana María Correal, dirigida por Pablo Beltrán-Pellicer y Mónica Arnal-Palacián, sobre el análisis de videos de funciones cuadráticas; y del equipo investigador formado por Matías Arce y Laura Conejo sobre el tratamiento de los intervalos en los libros de texto.

Estado actual de GTT5

En el Congreso SOMIDEM1 se lanzó la convocatoria a todos los interesados en temáticas relacionadas con la enseñanza y aprendizaje del cálculo, a fin de formar el GTT5: Enseñanza y Aprendizaje del Cálculo. Se estableció como eje conductor para las propuestas el considerar al cálculo como una de las áreas de mayor importancia para la investigación en la educación matemática superior por su presencia en los currículos escolares actuales desde los niveles medio superior hasta el superior en carreras de ingeniería y ciencias exactas.

El objetivo es evidenciar la relevancia de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo. Por esta razón, el grupo de trabajo pretende colaborar en la investigación sobre las problemáticas en esta rama de las matemáticas, desde el punto de vista de la matemática educativa y con el fin de promover un mayor acceso a las herramientas y el conocimiento del cálculo, a partir de las habilidades presentes y potenciales del docente y el alumno.

Además, el GTT5 busca ser un espacio tanto de discusión como de difusión de los resultados y aportaciones de investigaciones previas, por lo que se consideraron como parte de los objetivos del grupo de trabajo, las aportaciones teóricas que contribuyeron al desarrollo de la línea de investigación en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo.

El GTT5 estableció en su convocatoria, que se aceptaban artículos que abordan las discusiones más recientes dentro de la línea de investigación en la enseñanza y aprendizaje del cálculo, así como también reportes de experiencias de implementación en la práctica en pequeña o gran escala, artículos teóricos que aportaran al desarrollo de la línea de investigación y reportes de estudios de replicación. Es decir, se ofrecía un espectro variado de aportaciones para los interesados en discutir sus ideas, la dinámica del grupo de trabajo se basó en el envío con antelación de todas las propuestas a los participantes en el GTT5 para su lectura antes de la presentación, con el fin de tener elementos que desencadenaran la reflexión y discusión de ideas. Como segundo paso los participantes tuvieron la oportunidad de volver a enviar sus escritos para publicación, después de escuchar las observaciones, opiniones, sugerencias, reflexiones que los participantes realizaron durante las sesiones de trabajo.

Como resultado a esta convocatoria se recibieron cinco propuestas de estudiantes e investigadores de México o Colombia, cuyas temáticas se enfocan en diferentes niveles educativos, contenidos matemáticos y fundamentación teórica. Los trabajos involucraron diferentes contenidos de cálculo como el pensamiento variacional, el cálculo diferencial, la integral definida, área de regiones planas y el concepto de derivada, estas aportaciones además proponían propuestas didácticas, interpretaciones del proceso de construcción de conocimiento por parte de estudiantes y un enfoque teórico, como el Mathematics Teacher´s Specialised Knowledge (MTSK) a través de una lección o estudio de clase.

Evidentemente estas temáticas y aproximaciones teóricas no son las únicas que se encuentran presentes en las investigaciones que desde hace años se llevan a cabo en torno a la enseñanza y aprendizaje del cálculo, sin embargo, dan una muestra de los intereses actuales de investigadores noveles y experimentados de diferentes países, dando esto cuenta de la importancia de la labor del GTT5 a través de la SOMIDEM para ser un foro de discusión y reflexión sobre este tema.

Para el Congreso SOMIDEM a desarrollarse en marzo 2025, se recibieron cinco propuestas, las cuales se encuentran en proceso de revisión por lo cual no se pueden declarar aún, pero sí se puede destacar que estas propuestas nuevamente se enfocan en el nivel medio superior y superior, lo cual muestra la relevancia del desarrollo de los conceptos del cálculo desde el nivel medio superior para crear puentes que faciliten la continuidad de este desarrollo en el nivel superior.

Como asociación la SOMIDEM es muy joven, se constituyó hace alrededor de cinco años, teniendo su primer congreso en 2023 de manera virtual y teniendo en puerta el próximo en marzo del 2025. La SOMIDEM nace como un esfuerzo al interés de investigadores adscritos a diferentes instituciones académicas o escolares, interesados en dar a conocer las aportaciones que la investigación en matemática educativa pueda ofrecer a las personas interesadas en la mejora en la calidad de la educación matemática en México.

En este esfuerzo por ser un foro que promueva el desarrollo y la consolidación de la investigación en matemática educativa, la SOMIDEM ha planteado una serie de proyectos para cumplir este objetivo: Proyecto de la

Página web, Proyecto de Alianzas con Asociaciones Nacionales e Internacionales de Educación Matemática, Proyecto de Publicaciones SOMIDEM y por último el Proyecto Charlas con Matemáticos Educativos. Todos estos proyectos de naturaleza y dinámica diferente mantienen la esencia del objetivo de la sociedad.

Un esfuerzo más que realiza la sociedad es la creación de un comité Editorial SOMIDEM, conformado por reconocidos investigadores del área, y esta editorial promueve la creación de puentes entre la teoría y la práctica con el fin de impulsar la educación matemática, hasta la fecha la editorial ha publicado tres series de libros con temáticas relevantes en educación matemática.

Como resultado de los esfuerzos continuos y visionarios del comité editorial, se ha creado a finales del 2024 la Revista Enseñanza de las Matemáticas y Experiencias Docentes, enfocada en la difusión de experiencias docentes, e intercambio de propuestas y la reflexión crítica en la enseñanza de las matemáticas, y esta revista viene a dar voz a los docentes y su práctica a través de los resultados de la matemática educativa.

Como mención aparte nos referiremos a los eventos que organiza la SOMIDEM, uno de ellos es la Escuela SOMIDEM la cual se llevó a cabo por primera vez en 2024, este espacio permitió a los investigadores ofrecer una serie de talleres y cursos en línea a las personas involucradas en la enseñanza de las matemáticas, la modalidad a distancia y la variedad de cursos y talleres que se ofrecieron en esta primera edición permitieron a los asistentes atender las temáticas de su interés, además de acercar la investigación a la práctica docente.

El principal evento de la sociedad es el Congreso SOMIDEM, en este evento se dedica un espacio especial a los Jóvenes Investigadores, para el desarrollo de conversatorios, talleres y salas de discusión sobre sus proyectos. El congreso ofrece un espacio de trabajo colectivo organizado por Grupos de Trabajo Temático (GTT), se propusieron 18 grupos con temáticas de relevancia en la matemática educativa y para el Congreso SOMIDEM 2 se mantuvieron los mismos grupos de trabajo dados los excelentes resultados que se obtuvieron con las contribuciones de estudiantes, profesores e investigadores en el primer congreso, los cuales culminaron con la publicación del libro Perspectivas actuales de la educación matemática (2024).

Estos proyectos y eventos brevemente descritos muestran la visión que la SOMIDEM tiene, sobre cómo aportar a la calidad de la educación en matemáticas no solamente en México, promoviendo una serie de actividades que permiten la difusión, intercambio y reflexión de ideas, experiencias y resultados de investigación. Todo esto abona a la consolidación de la matemática educativa como un referente a los desarrollos curriculares y políticas educativas.

Panorama de las principales temáticas sobre la enseñanza y aprendizaje del cálculo

Como parte también de los proyectos vertebrales de la sociedad está el dar continuidad a los más de 30 años de la publicación internacional arbitrada Revista Educación Matemática con el objetivo de difundir los resultados de las investigaciones de los miembros de la sociedad y de otros colegas de la región iberoamericana. Las aportaciones que se han publicado en esta revista ofrecen también un panorama sobre las investigaciones que se han realizado en México en los últimos 30 años. La Revista Educación Matemática ha abordado diversas temáticas relacionadas con la enseñanza y aprendizaje del cálculo a lo largo de los años. Sin pretender ser una relación completa y exhaustiva de lo publicado en sus 36 volúmenes, a continuación, se destacan algunos de los enfoques teóricos y temáticas presentes.

Perspectivas teóricas: las investigaciones publicadas se apoyan en diferentes perspectivas teóricas como lo son el EOS, Teoría Antropológica de lo Didáctico, aprendizaje significativo, resolución de problemas y visualización matemática, por mencionar algunos, lo que permite poner sus propuestas y resultados a la vista de la comunidad de matemática educativa para su discusión y retroalimentación, contribuyendo así al cuerpo de conocimiento del área.

Enfoques históricos y filosóficos

Se ha explorado la evolución histórica del cálculo y su enseñanza, enfatizando la importancia de comprender los procesos históricos en la formación de conceptos matemáticos. Por ejemplo, el artículo "La enseñanza del cálculo - una cuestión de involucramiento" de Rodrigues y Bozola (1995), el cual está presentado como notas de clase; "Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el Cálculo Diferencial" (Moreno Guzmán y Cuevas Vallejo, 2004) en donde se trata de identificar los errores de concepción sobre este tema en estudiantes y profesores e "Introducción de los Conceptos Fundamentales del Cálculo Diferencial e Integral" (Wenzelburger, 1993) presentado como una propuesta didáctica que discute cómo la enseñanza del cálculo debe orientarse en la génesis histórica de la ciencia, promoviendo una formación lenta de conceptos matemáticos a través de la liberación de percepciones sensoriales y la intuición primaria.

Uso de tecnología en la enseñanza

Se han investigado métodos visuales y el uso de herramientas tecnológicas para facilitar la comprensión de conceptos de cálculo. El artículo "Recursos para el cálculo visual de integrales" (Martínez de la Rosa, 2014) presenta métodos visuales de integración que utilizan la simetría de las funciones y las funciones inversas, recuperando el concepto de subtangente para la computación visual de áreas. La idea de tecnología no solo se centra en computadoras o software especializado de matemáticas, también hay publicaciones que rescatan el uso de las calculadoras, por ejemplo, en el estudio "Cálculo diferencial: aprendizaje cooperativo con base en las representaciones que se logran en calculadoras de tipo avanzado" (Balderas Cañas, 1995), presenta una investigación con alumnado de nivel medio superior durante un curso semestral. Guarin Amorocho y Parada Rico (2023), en "Acciones y expresiones de la comprensión del límite de una función en un punto, por estudiantes de cálculo diferencial", presentan un estudio con el uso del software GeoGebra para buscar evidencia sobre la comprensión de los estudiantes sobre el concepto del límite de una función en un punto. Como se puede notar, el uso de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje del cálculo es un elemento presente de manera permanente en las investigaciones ya sea como eje central o como mediador del conocimiento.

Propuestas de innovaciones didácticas

Se han propuesto enfoques alternativos para la enseñanza del cálculo, como, por ejemplo, el diseño de secuencias didácticas orientadas al descubrimiento del Teorema Fundamental del Cálculo. El artículo "Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo" (Robles Arredondo et al., 2014) presenta el diseño de una secuencia didáctica de tareas que promueve, mediante la utilización de ambientes interactivos, el acercamiento intuitivo y la conjetura del teorema. En muchas ocasiones las propuestas vienen acompañadas con el uso de la tecnología (Martínez de la Rosa, 2014). Si bien el panorama presentado no se refiere a investigaciones originadas directamente en el seno de la SOMIDEM, permite observar la trayectoria de uno de sus proyectos institucionales más estables: la Revista Educación Matemática. Esta publicación ha funcionado como un referente importante para quienes investigan en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo, particularmente en lo que respecta a la formulación de problemas de investigación, la discusión de marcos teóricos y la presentación de propuestas didácticas. En este sentido, los trabajos que hoy se desarrollan en el GTT5 son pertinentes de acuerdo con investigaciones previamente publicadas en dicha revista, lo que ha favorecido una cierta continuidad temática y metodológica. Así, la revista ha servido como una fuente de consulta y como un punto de partida para quienes posteriormente se integraron al GTT5, sin que ello implique que las investigaciones del grupo dependan de esta publicación o se limiten a su orientación editorial.

Líneas futuras de GTT5

Un aspecto importante que está presente en varias investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje del cálculo es el papel o el uso de las TIC, hasta este momento no se han recibido propuestas en las dos ediciones del congreso que tengan esta variable como un aspecto relevante de la investigación. Para atender esto, es necesario en la siguiente convocatoria hacer explícita la necesidad de incluir en la discusión del GTT el rol de las TIC.

En este sentido, también es importante traer a discusión el efecto que tienen o tendrán la inteligencia artificial (IA) en el área de interés del grupo y cómo esto se puede interpretar o apoyar a través de los diferentes marcos teóricos de la matemática educativa, lo cual podría dar lugar a nuevas propuestas o reformulaciones teóricas, por eso es importante promover este tipo de discusiones dentro del GTT5.

Es importante reconocer que en México desde hace 15 años se lleva a cabo el Encuentro Internacional Sobre la Enseñanza del Cálculo, Matemáticas y Ciencias (EICAL). Los primeros 10 años el énfasis fue solo sobre la enseñanza del cálculo, pero en las últimas ediciones se decidió incluir matemáticas y ciencias, por la estrecha relación que el cálculo tiene con otras áreas del conocimiento y también en atención a la necesidad de espacios de colaboración y difusión de los resultados de investigación, así como de acercar estos resultados a la práctica de los docentes, Si bien este evento nace de la inquietud de investigadores de todo México desde hace casi 20 años, a través de los cuales se fueron incorporando importantes investigadores de Francia, España, Colombia, Chile, algunos de los cuales también somos miembros de la SOMIDEM, hace falta seguir promoviendo la colaboración más estrecha entre el GTT5 y el EICAL para seguir promoviendo la calidad en la investigación, específicamente del cálculo.

Como mostramos, a pesar del corto tiempo que lleva trabajando la SOMIDEM con respecto a la SEIEM, la sociedad tiene una visión clara de cómo aportar a la consolidación de la matemática educativa desde diferentes frentes con proyectos, eventos, foros y publicaciones, siendo inclusiva a todos los actores de los procesos educativos.

Conclusiones

En toda esta panorámica de investigaciones actuales, se observa que no en pocos casos existen trabajos en los que colaboran investigadores de España y de Latinoamérica y, en concreto, también de México. Centrándonos en esa colaboración España-México, podemos destacar las colaboraciones ya existentes y fructíferas entre Edelmira Badillo, Gloria Sánchez-Matamoros y María Trigueros; entre Matías Camacho y Manuel Santos-Trigo, o entre Vicenç Font y Flor Rodríguez-Vásquez; que son una muestra del potencial que pueden tener las investigaciones compartidas entre ambos países.

En la extensión de las investigaciones mencionadas por ambas partes podemos observar la diferencia de edades en la creación de ambas sociedades, en GIDAM ya se cuenta con tres pilares fundamentales que rigen su trabajo, pero es necesario revitalizar las dinámicas de trabajo que permitan la sinergia con otros equipos de trabajo, así como seguir fortaleciendo las temáticas que ya se trabajan, sin perder de vista las nuevas posibles temáticas en torno a la enseñanza y aprendizaje del análisis matemático.

Si bien en México hay desde hace muchos años investigaciones sobre el cálculo, dentro de la SOMIDEM se empieza gestar un grupo de investigadores noveles en matemática educativa, interesados en aportar a la problemática y que encuentran en la dinámica de trabajo del GTT5 un espacio de interlocución enriquecedor para sus propuestas e investigaciones. Dada la forma de organización de los GTT de la SOMIDEM, en este capítulo nos hemos enfocado solo en el GTT5, ya que las temáticas relacionadas con el desarrollo del pensamiento matemático avanzado caen fuera de su alcance, que sí son estudiadas en GIDAM. Estas temáticas se encuentran en GTT13 de Razonamiento, argumentación y prueba en Educación Matemática, así como posiblemente en otros con temáticas más amplias o aplicadas.

Más allá de la diferencia en el tiempo de actividades en ambas asociaciones, en el recorrido mostrado, se puede dar cuenta de la coincidencia en temáticas de interés y de gran relevancia para la enseñanza y aprendizaje del cálculo. Definitivamente aún no tenemos todas las respuestas y si bien actualmente se pueden encontrar propuestas que aportan a la práctica docente y reflexiones que nos llevan a seguir trabajando e investigando, es necesario establecer puentes de comunicación para reconocer y conocer el trabajo realizado en ambas sociedades y seguir aportando a la matemática educativa de manera conjunta.

Referencias

Aranda, C., & Callejo, M. L. (2017). Construcción de la función integral y razonamiento covariacional: dos estudios de casos. *BOLEMA, 31*(58), 777–798. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n58a13

Arce, M., & Conejo, L. (2021). Características de las tareas de conversión entre representaciones de intervalos de la recta real propuestas en libros de texto. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, & D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 141–148). SEIEM.

Arce, M., Conejo, L., & Ortega, T. (2016). ¿Cómo son los apuntes de matemáticas de un estudiante? Influencia de los elementos matemáticos y sus relaciones. *Enseñanza de las Ciencias, 34*(1), 149–172. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1706

Arce, M., Conejo, L., Dos Santos, C., Ortega, T., & Pecharromán, C. (2019). Concepciones del profesorado de educación secundaria sobre la demostración matemática y su enseñanza y aprendizaje. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández, & M. T. González (Eds.), I*nvestigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 417–438). Ediciones Universidad de Salamanca.

Arnal-Palacián, M. (2022). Infinite limit of a function at infinity and its phenomenology. *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis| Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia,14*, 25–41. https://doi.org/10.24917/20809751.14.3

Arnal-Palacián, M., Claros-Mellado, J., & Oller-Marcén, A. M. (2024). La noción de límite en libros de texto españoles de segunda enseñanza del siglo XIX. *Enseñanza de las Ciencias, 42*(2), 197–219. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6111

Arnal-Palacián, M., Claros-Mellado, J., & Sánchez-Compaña, M. T. (2020a). Límite infinito de sucesiones en libros de texto españoles: desde 1936 hasta 2019. *PNA, 14*(4), 295–322. https://doi.org/10.30827/pna.v14i4.15143

Arnal-Palacián, M., Claros-Mellado, J., & Sánchez-Compaña, M.T. (2020b). Infinite limit of sequences and its phenomenology. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 15*(3), em059, https://doi.org/10.29333/iejme/8279

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

Azcárate, C., Camacho-Machín, M., González, M. T., & Moreno, M. (Eds.) (2015). *Didáctica del Análisis Matemático: una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM*. SEIEM y Servicio de Publicaciones de la Universidad de La Laguna.

Azcárate, C., Casadevall, M., Casellas, E., & Bosch, D. (1996). *Cálculo diferencial e integral.* Síntesis.

Badillo, E., Azcárate, C., & Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos $f'(a)$ y $f'(x)$ en profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(2), 191–206.

Bajo-Benito, J. M., Gavilán-Izquierdo, J. M., & Sánchez-Matamoros García, G. (2023). The concept of number sequence in graphical representations for secondary school students. *European Journal of Educational Research, 12*(1), 155–166. https://doi.org/10.12973/eu-jer.12.1.159

Balderas Cañas, P. E. (1995). Cálculo diferencial: Aprendizaje cooperativo con base en las representaciones que se logran en calculadoras de tipo avanzado. *Educación Matemática, 7*(3), 136–151. https://doi.org/10.24844/EM0703.10

Barreras, A., Dubarbie-Fernández, L., & Oller-Marcén, A. M. (2022). Análisis de applets de GeoGebra para la enseñanza del límite de una función. *Bordón: Revista de pedagogía, 74*(4), 65–83. https://doi.org/10.13042/Bordon.2022.93361

Bermejo-Luna, M. V., & Sánchez-Matamoros, G. (2022). El esquema de derivada en la respuesta de un estudiante a tareas de cinemática: estudio de caso. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, & J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 169-177). SEIEM.

Blázquez, S., & Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 4*(3), 219-236.

Borji, V., Sánchez, A., Font, V., & Garcés, W. (2021). Un estudio sobre la comprensión de los estudiantes de la derivación implícita, basado en APOE y EOS. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, & D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 173–180). SEIEM.

Camacho-Machín, M. (2021). Agenda de investigación para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el nivel universitario. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, & D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 33– 48). SEIEM.

Claros, F. J., Sánchez, M. T., & Coriat, M. (2007). Fenómenos que organizan el límite. *PNA, 1*(3), 125–137.

Claros, F. J., Sánchez, M. T., & Coriat, M. (2016). Tratamiento del límite finito en libros de texto españoles de secundaria: 1933-2005. *Educación Matemática, 28*(1), 125–152. https://doi.org/10.24844/EM2801.05

Conejo, L., & Ortega, T. (2014). Las demostraciones de los teoremas de continuidad en los libros de texto para alumnos de 17-18 años correspondientes a las tres últimas leyes educativas españolas. *Números, 87*, 5–23

Conejo, L., Arce, M., & Ortega, T. (2015). Análisis de las justificaciones de los teoremas de derivabilidad en los libros de texto desde la Ley General de Educación. *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática, 8,* 51–71. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.117

Dolores-Flores, C., & García-García, J. (2017). Conexiones intramatemáticas y extramatemáticas que se producen al resolver problemas de cálculo en contexto: Un estudio de casos en el nivel superior. *BOLEMA, 31*(57), 158–180. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a08

Dubarbie-Fernández, L., Barreras, Á., & Oller-Marcén, A. M. (2025). El uso de GeoGebra en la enseñanza de conceptos matemáticos: prácticas, barreras y percepciones docentes. *Revista Latinoamericana de Tecnología Educativa-RELATEC, 24*(1), 77–100. https://doi.org/10.17398/1695-288X.24.1.77

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations.* Springer. https://doi.org/qh8d

Esteve-Blasco, M., González-Astudillo, M. T., & Fuertes-Prieto, M. A. (2024). Sumas y diferencias de leibniz: antesala de la integral. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent, & C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 580). SEIEM.

Fernández, C., Moreno, M., & Sánchez-Matamoros, G. (2024). Prospective secondary teachers' noticing of students' thinking about the limit concept: pathways of development. *ZDM Mathematics Education, 56,* 1137–1151. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01573-z

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., & Callejo, M. L. (2018). La coordinación de las aproximaciones en la comprensión del concepto de límite cuando los estudiantes para profesor anticipan respuestas de estudiantes. *Enseñanza de las Ciencias, 36*(1), 143–162. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2291

Fernández-León, A., & Gavilán-Izquierdo, J. M. (2022). Caracterizando la práctica matemática de demostrar de una investigadora en matemáticas. *BOLEMA, 36*(74), 1215–1235. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a13

Fernández-León, A., Gavilán-Izquierdo, J. M., & Toscano, R. (2021). A case study of the practices of conjecturing and proving of research mathematicians. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 52*(5), 767–781. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1717658

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., & Rico, L. (2015). Razonamientos basados en el concepto de límite finito de una función en un punto. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(2), 211–229. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1575

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., Rico, L., & Castro, E. (2013). Definiciones personales y aspectos estructurales del concepto de límite finito de una función en un punto. *PNA, 7*(3), 117–131. https://doi.org/qh8g

Font, V., Trigueros, M., Badillo, E., & Rubio, N. (2016). Mathematical objects through the lens of two different theoretical perspectives: APOS and OSA. *Educational Studies in Mathematics, 91*, 107–122. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9639-6

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematics Structures.* Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47235-X

Fuentealba, C., Badillo, E., & Sánchez-Matamoros, G. (2019). Identificación y caracterización de los subniveles de desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias, 37*(2), 63–84. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2518

Fuentealba, C., Trigueros, M., Sánchez-Matamoros, G., & Badillo, E. (2022). Los mecanismos de asimilación y acomodación en la tematización de un Esquema de derivada. AIEM - *Avances de Investigación en Educación Matemática, 21*, 23–44. https://doi.org/10.35763/aiem21.4241

Galindo-Illanes, M., & Breda, A. (2022). El tratamiento de la derivada en el plan de estudios de ingeniería comercial en Chile. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, & J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 285–293). SEIEM.

Galindo Illanes, M. K., Breda, A., Chamorro Manríquez, D. D., & Alvarado Martínez, H. A. (2022). Analysis of a teaching learning process of the derivative with the use of ICT oriented to engineering students in Chile. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 18*(7), em2130. https://doi.org/10.29333/ejmste/12162

Gavilán-Izquierdo, J. M., & Fernández-León, A. (2023). Caracterizando cómo conjeturan los investigadores en matemáticas: un estudio de caso. *AIEM – Avances de Investigación en Educación Matemática, 24*, 21–37. https://doi.org/10.35763/aiem24.4223

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 39,* 127–135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

González-Flores, Y., Montoro-Medina, A. B., & Ruiz-Hidalgo, J. F. (2021). Análisis de las definiciones de límite que brindan estudiantes universitarios. *Uniciencia, 35*(2), 271–290. http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.18

González-Flores, Y., Montoro-Medina, A. B., & Ruiz-Hidalgo, J. F. (2024). Significado del límite expresado por estudiantes universitarios. *Educación Matemática, 36*(3), 242–272. https://doi.org/10.24844/EM3603.09

Guarin Amorocho, S. A., & Parada Rico, S. E. (2023). Acciones y expresiones de la comprensión del límite de una función en un punto, por estudiantes de cálculo diferencial. *Educación Matemática, 35*(1), 197–228. https://doi.org/10.24844/EM3501.08

Inglada, N., Breda, A., & Sala-Sebastià, G. (2023). Una pauta especializada para reflexionar sobre la enseñanza de las funciones en secundaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, & P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 291–298). SEIEM.

Jacobs, V. R., Lamb, L. L., & Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169–202. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.41.2.0169

Lillo, E., Moreno, M., Orts, A., & Llinares, S. (2023). Comprensión de la gráfica de la función derivada: de proceso a objeto. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, & P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 323–330). SEIEM.

Llinares, S., Fernández, C., & Sánchez-Matamoros, G. (2016). Changes in How Prospective Teachers Anticipate Secondary Students' Answers. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 12*(8), 2155–2170. https://doi.org/10.12973/eurasia.2016.1295a

Martín-Barcala, A., & González-Astudillo, M. T. (2019). Errores de los estudiantes de secundaria en torno al concepto de logaritmo. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano, & Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 629). SEIEM.

Martínez de la Rosa, F. (2014). Recursos para el cálculo visual de integrales. *Educación Matemática, 26*(1), 153–169. https://doi.org/10.24844/EM2601.06

Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP]. (2022). *Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato*. MEFP.

Milanesio, B., & Burgos, M. (2024). El rol de la demostración en la enseñanza de la continuidad en segundo de bachillerato. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent, & C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 345–352). SEIEM.

Milanesio, B., & Markiewicz, M. E. (2023). La complejidad semiótica de una demostración por inducción matemática. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, & P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 363–370). SEIEM.

Moreno Guzmán, S., & Cuevas Vallejo, C. A. (2004). Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el Cálculo Diferencial. *Educación Matemática, 16*(2), 93–104. https://doi.org/10.24844/EM1602.05

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for School Mathematics.* NCTM.

Ortega, T., & Porres-Tomé, M. (2016). El dinamismo de la finitud en el caso de la integral definida: ¿Cómo facilitar la comprensión? En L. Rico, M. Cañadas, A. Marín, & M. T. Sánchez (Eds.), I*nvestigaciones en Didáctica de la Matemática: homenaje a Moisés Coriat* (pp. 209–218). Comares.

Ortega, T., & Sierra, M. (1998). El concepto de derivada: algunas indicaciones para su enseñanza. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 32*, 87–115.

Orts, A., Llinares, S., & Boigues, F. J. (2018). Trayectorias de aprendizaje del concepto de recta tangente en alumnos de Bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias, 36*(3), 121–140. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2252

Pérez-Montilla, A., & Arnal-Palacián, M. (2023). An Approach to the Teacher Educator's Pedagogical Content Knowledge for the Development of Professional Noticing in Pre-Service Teacher Education. *Education Sciences, 13*(6), 544. https://doi.org/10.3390/educsci13060544

Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics, 55*(1), 103–132.

Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K., & Teppo, A. (2005). Advancing mathematical activity: A practice-oriented view of advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 51–73. https://doi.org/dxs3n5

Rico, L., Lupiáñez, J. L., & Molina, M. (Eds.) (2013). *Análisis didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular.* Comares.

Robles Arredondo, M. G., Tellechea Armenta, E., & Font Moll, V. (2014). Una propuesta de acercamiento alternativa al teorema fundamental del cálculo. *Educación Matemática, 26*(2), 69–109. https://doi.org/10.24844/EM2602.03

Rodrigues, S., & Bozola, M. A. (1995). La enseñanza del Cálculo – una cuestión de involucramiento. *Educación Matemática, 7*(1), 100–107. https://doi.org/qh8k

Rodríguez-Nieto, C. A., Font, V., Rodríguez-Vásquez, F. M., & Pino-Fan, L. R. (2023). Onto-semiotic analysis of one teacher's and university students' mathematical connections when problem-solving about launching a projectile. *Journal on Mathematics Education, 14*(3), 563–584. https://doi.org/qh8m

Rodríguez-Nieto, C. A., Rodríguez-Vásquez, F. M., & Font, V. (2023b). Combined use of the extended theory of connections and the onto-semiotic approach to analyze mathematical connections by relating the graphs of *f* and *f* '. *Educational Studies in Mathematics, 114*, 63–88. https://doi.org/gs4wcm

Sánchez Aguilar, M., García González, M. del S., & Castañeda, A. (Eds.) (2024). *Perspectivas actuales de la Educación Matemática.* Editorial SOMIDEM. https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01

Sánchez-Matamoros, G., & García, M. (2015). Investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del concepto de derivada. En C. Azcárate, M. Camacho-Machín, M. T. González, & M. Moreno (Eds.), *Didáctica del Análisis Matemático: una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM* (pp. 97–108). SEIEM y Servicio de Publicaciones de la Universidad de La Laguna.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., & Llinares, S. (2019). Relationships among prospective secondary mathematics teachers' skills of attending, interpreting and responding to students' understanding. *Educational Studies in Mathematics, 100*, 83–99. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9855-y

Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 11*(2), 267–296.

Santos-Trigo, M., Camacho-Machín, M., & Barrera-Mora, F. (2024). Focusing on foundational Calculus ideas to understand the derivative concept via problem-solving tasks that involve the use of a Dynamic Geometry System. *ZDM Mathematics Education, 56*, 1287–1301. https://doi.org/nzj7

Sierra, M., González-Astudillo, M. T., & López-Esteban, M. C. (1999). Evolución histórica del concepto de "límite funcional" en los libros de texto de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria (COU): 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias, 17*(3), 463–476.

Sierra, M., González-Astudillo, M. T., & López, C. (2000). Concepciones de los alumnos de bachillerato y curso de orientación universitaria sobre límite funcional y continuidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 3*(1), 71–85.

Skemp, R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *The Arithmetic Teacher, 26*(3), 9–15.

Suárez-Rodríguez, M., & Sacristán Rock, A. I. (2022). Actividades para aprender sobre densidad numérica: una trayectoria hipotética con estudiantes de bachillerato. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, & J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 633). SEIEM.

Suárez-Rodríguez, M., & Figueras, O. (2022). Una secuencia didáctica para aprender y comprender sobre densidad numérica: Un estudio con profesores en formación. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, & J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 634). SEIEM.

Tall, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Springer.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151–169.

Trigueros, M., Badillo, E., Sánchez-Matamoros, G., & Hernández-Rebollar, L. A. (2024). Contributions to the characterization of the Schema using APOS theory: Graphing with derivative. *ZDM Mathematics Education, 56*, 1093–1108. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01615-6

Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A., & Ruiz-Hidalgo, J. F. (2020a). La derivada en los libros de texto de 1º de Bachillerato: Un análisis a las tareas propuestas. *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática, 18*, 87–102. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.288

Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A., & Ruiz-Hidalgo, J. F. (2020b). Significado de derivada en las tareas de los libros de 1° de Bachillerato. *BOLEMA, 34*(68), 911–933. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n68a04

Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A., & Ruiz-Hidalgo, J. F. (2020c). Análisis de los argumentos dados por docentes en formación a una tarea sobre derivadas. *PNA, 14*(3), 173–203. https://doi.org/10.30827/pna.v14i3.12229

Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A., & Ruiz-Hidalgo, J. F. (2023a). Pre-service teachers' understanding of the derivative of a function at a point. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 54*(4), 483–510. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1957504

Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A., & Ruiz-Hidalgo, J. F. (2023b). Tareas propuestas por futuros docentes sobre el concepto de función. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, & P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 539–546). SEIEM.

Wenzelburger, E. (1993). Introducción de los Conceptos Fundamentales del Cálculo Diferencial e Integral - Una Propuesta Didáctica. *Educación Matemática, 5*(3), 93–123. https://doi.org/10.24844/EM0503.06