Concepciones de modelos y model(iz)ación en educación matemática, ingeniería y ciencias

Ana Isabel Sacristán Rock [1]
Marco Antonio Olivera Villa [2]
Angel Pretelín Ricárdez [3]

Resumen

La modelación o modelización se puede entender de diversas maneras. En este capítulo presentamos algunas definiciones y concepciones de modelos y model(iz)ación a partir de una revisión de la literatura principalmente en educación matemática e ingeniería, así como de ciencias en general. La model(iz)ación se puede entender como la construcción de un modelo –una representación– que puede ser de diferentes tipos, particularmente matemático. El propósito de la model(iz)ación involucra construir y manipular representaciones o simulaciones de sistemas o fenómenos para explorarlos y predecir su comportamiento; para ello, las tecnologías computacionales se utilizan frecuentemente. La model(iz)ación también se considera útil para el aprendizaje matemático; al respecto, se discute brevemente la propuesta de actividades inducidoras de modelación (o MEAs). Finalmente, en muchos contextos, la modelización involucra una serie de pruebas iterativas y ciclos de revisión. Se presentan ciclos de model(iz)ación dados por diferentes autores.

Palabras clave

Modelos, modelación, ciclos, educación matemática, ingeniería.

---

[1] asacrist@cinvestav.mx
Departamento de Matemática Educativa Cinvestav, Unidad Zacatenco

[2] marcoantonio.olivera@cch.unam.mx
Colegio de Ciencias y Humanidades, plantel Vallejo, UNAM

[3] apretelin@ipn.mx
Unidad Profesional Interdisciplinaria en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas (UPIITA), IPN

Sacristán Rock, A. I., Olivera Villa, M. A., & Pretelín Ricárdez, A. (2025). Concepciones de modelos y model(iz)ación en educación matemática, ingeniería y ciencias. En A. Solares-Rojas, & A. P. Preciado Babb (Eds.), *La investigación en modelización matemática: un diálogo entre educadores de Latinoamérica y España* (pp. 35–63). Editorial SOMIDEM. https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S2/2025/01-02

Abstract

Modeling can be understood in several ways. We present, in this chapter, some definitions and conceptions of models and modeling based on a review of the literature, particularly from the fields of mathematics education and engineering, as well as from science in general. Modeling can be understood as the construction of a model -a representation- which can be of different types, but particularly mathematical. The purpose of modeling involves building and manipulating representations or simulations of systems or phenomena to explore them and predict their behavior; for this, digital technologies are frequently used. Modeling is also considered useful for mathematical learning; in this regard, the modeling-eliciting activities (MEAs) paradigm is briefly discussed. Finally, in many contexts, modeling involves a series of iterative testing and revision cycles; we present modeling cycles given by different authors.

Keywords

Models, modeling, cycles, mathematics education, engineering.

Introducción

La modelación o modelización se puede entender de diversas maneras. En el Diccionario de la Real Academia Española [RAE], los términos *modelación* y *modelización* se definen como "la acción y efecto de modelar" o "de modelizar", respectivamente (RAE, 2023). Pero, mientras que, según la RAE, *modelar* tiene un conjunto amplio de definiciones relacionados con "conformar algo" o "ajustarse a un modelo", *modelizar* se define como "construir el modelo o esquema teórico de algo. Modelizar una situación" (RAE, 2023). En México es común traducir el término *modeling* del inglés como *modelación* (en particular cuando se habla de modelación matemática), mientras que en otros países de habla hispana se utiliza *modelización*.

En este capítulo utilizaremos el término modelación. Independientemente del término que se use, es importante hacer una revisión de la literatura sobre cómo se entienden la modelación y los modelos en diferentes contextos y disciplinas: ingeniería, matemáticas, ciencias y educación. En términos generales, la modelación se puede definir como la construcción de una representación (modelo) que puede ser de diferentes tipos. Lesh y Lehrer (2003) afirman que el término modelación se refiere a un proceso de desarrollo de descripciones representativas destinadas a un propósito y en situaciones específicas. Involucra construir, manipular y predecir los sistemas que están siendo modelados. En general, la modelación involucra una serie de pruebas iterativas y ciclos de revisión. En la modelación matemática, los modelos matemáticos son descripciones o explicaciones poderosas, los cuales se enfocan en descubrir patrones, regularidades y otras características sistémicas referentes al significado estructural de los sistemas.

Inicialmente, la mayor parte de la revisión presentada en este capítulo se hizo para contextualizar varios de nuestros trabajos de investigación, en particular aquellos donde se fomentaron diversas actividades de modelación en estudiantes de nivel superior de matemáticas o ingeniería. Por ejemplo, algunas actividades incluyeron la modelación de fenómenos físicos –tales como de la gravedad usando el software Modellus[1] (Olivera & Sacristán, 2014), o del comportamiento del agua en la programación computacional de videojuegos (Pretelín-Ricárdez & Sacristán, 2015)–, e incluso de sistemas de robótica (Sacristán & Pretelín-Ricárdez, 2017).

Modelos y modelación (matemática)

La construcción de un modelo (sobre todo en ciencia) es una actividad para entender, describir, representar o simular algún fenómeno. Existen diferentes sentidos del término modelo, que puede referirse a 1) modelos tangibles con cierto grado de fisicalidad, tales como modelos gráficos, maquetas, o simulaciones (e.g., computacionales); o 2) descripciones más teóricas o conceptuales de un fenómeno o parte de un fenómeno (e.g., modelos matemáticos que consisten en un conjunto de ecuaciones matemáticas) que sirven de fundamento para la construcción de otros tipos de modelos (e.g., para las simulaciones).

De hecho, en el sentido que nos concierne, la RAE (2023) da las siguientes dos definiciones para modelo: "representación en pequeño de alguna cosa" y "esquema teórico, generalmente en forma matemática, de un sistema o de una realidad compleja, como la evolución económica de un país, que se elabora para facilitar su comprensión y el estudio de su comportamiento"[2]. Así, un modelo se puede definir como una representación física (tangible) o no física (conceptual) de un objeto o situación real.

Intuitivamente, como es señalado por el National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000) de los Estados Unidos, se suele entender un modelo en su sentido físico como una réplica a escala de un objeto (por ejemplo, se hacen modelos de barcos o aviones). Un modelo físico es conveniente para trabajar o jugar, ya que comparte muchas de las propiedades del objeto original (como el color, los materiales, y su función), pero no aquellas que pueden impedir su manipulación (tamaño o peso). En las teorías de Minsky (1965) se define que para un observador, "un objeto A* es un modelo de un objeto A" en la medida en que el observador "usa A* para responder a las preguntas que le interesan acerca de A" (p.1).

Así, un modelo ayuda a preguntar y entender (investigar) sobre el objeto en cuestión. Esto aplica no sólo en lo físico, sino que cualquier modelo es una representación del objeto, sistema[3] o fenómeno real que se modela, de donde se abstraen algunas de las cualidades, manteniendo lo más importante y necesario para su estudio, aunque teniendo en mente las características que

[1] https://zenodo.org/communities/modellus

[2] https://dle.rae.es/modelo

que no se modelan. Así, se puede experimentar con el modelo, analizando diferentes posibilidades sin repercusiones. Por tanto, la modelación es una herramienta poderosa que puede promover los principios del pensamiento científico (Aris, 1994). En el caso de la modelación de un fenómeno de la naturaleza, lo importante es entender su comportamiento. Esta comprensión se logra a través de un estudio matemático de las diversas variables físicas involucradas, las cuales pueden interactuar entre sí, pero, a la vez, omitiendo elementos que podrían complicar la construcción del modelo y su comprensión. La modelación matemática es el proceso "de representación de los problemas reales del mundo en términos matemáticos en un intento de encontrar soluciones a estos problemas" (Ang, 2001, p. 64); es decir, es el proceso de elaboración de un modelo matemático (NCTM, 2000).

En un modelo matemático se abstraen aspectos del sistema real, tales como variables, operadores, funciones y desigualdades (asociados a ciertos comportamientos), representándolos mediante lenguaje matemático (e.g., ecuaciones) para describir sus relaciones. Al igual que otros modelos, es una representación simplificada (abstracción) de un sistema o fenómeno real y de su comportamiento.

Por ejemplo, Ahmadi (2011) presenta la modelación de un tornado (Figura 1) mediante ecuaciones con variables de componentes físicos que interactúan entre sí (*a*), así como por una gráfica simplificada del fenómeno (*b*), donde sólo considera tres velocidades:

Figura 1

Modelos de un tornado (Ahmadi, 2011)

(a)

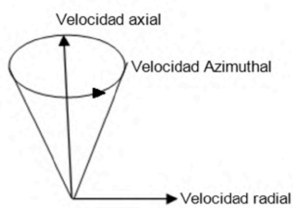
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.(\rho v) = 0$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla P + F + \mu \nabla^2 v$$

donde

$\rho = densidad\ del\ aire$
$t = tiempo$
$v = velocidad\ azimuthal\ (Respecto\ al\ eje\ Z)$
$P = presión$
$F = fuerza$

(b)



[3] Hestenes (2010) explica que "un sistema es un conjunto de objetos relacionados, que pueden ser reales o imaginarios, físicos o mentales, simples o compuestos. La estructura de un sistema es un conjunto de relaciones entre sus objetos. El sistema en sí se llama el referente del modelo" donde el modelo es "una representación de la estructura en un sistema dado" (p. 17).
Cuando se habla de un sistema en ingeniería, normalmente se define desde el punto de vista de la interconexión de componentes (acorde con las definiciones dadas en ciencias y matemáticas), o bien, involucrando la entrada y salida de señales (en cuyo caso, para propósitos de modelación y análisis del comportamiento de un sistema, se toma en cuenta la relación de las señales de entrada con las de salida, y entre elementos).

Epstein (2008) da 16 razones por las cuáles se deben construir modelos matemáticos, de las cuáles resaltamos las siguientes:

1. *Explicar* (distinto de predecir): hay modelos matemáticos que solamente explican, pero no predicen (y también a la inversa). Por ejemplo, las placas tectónicas explican los terremotos, pero no permiten predecir su ocurrencia.
2. *Guiar la recolección de información*: la teoría y los modelos sirven para saber qué datos recolectar en una experimentación.
3. *Iluminar las dinámicas centrales*: los modelos simples pueden tener un gran valor sin tener que ser completamente correctos; en realidad, son idealizaciones.
4. *Sugerir analogías*: una gran cantidad de procesos tienen modelos idénticos o similares (e.g., las leyes de la atracción electrostática y de la gravitación de Newton tienen la misma forma algebraica).
5. *Encontrar nuevas preguntas*: los modelos pueden llevarnos a plantear nuevas preguntas.
6. *Promover hábitos de pensamiento científico*. Epstein (2008) considera que la contribución más importante del proceso de modelación es que promueve y refuerza el hábito de pensar científicamente, reconociendo que el conocimiento está sujeto a revisión, así como su evidencia (se promueve poder poner en duda el conocimiento generado).
7. *Acotar resultados a rangos plausibles*
8. *Iluminar incertidumbres clave*
9. *Ofrecer opciones para crisis, en tiempo casi real*
10. *Mostrar las disyuntivas / sugerir las eficiencias*
11. *Poner a prueba la solidez de una teoría prevaleciente a través de ciertas perturbaciones*
12. *Exponer que lo que se da por hecho puede ser incompatible con los datos disponibles*
13. *Revelar que lo aparentemente simple (o complejo) puede ser complejo (o simple)*

Los modelos en la educación matemática realista son vistos como representaciones de problemas, que necesariamente reflejan aspectos esenciales y conceptos matemáticos y estructuras que son relevantes para el problema o situación, pero que pueden tener diferentes manifestaciones. Diversos materiales, esquemas, diagramas y bosquejos, así como situaciones paradigmáticas y otros símbolos se utilizan como modelos (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003; Gravemeijer, 1994; Treffers, 1987). De igual manera, Lesh y colegas (Lesh & Doerr, 2003; Lesh & Harel, 2003) consideran que los modelos son sistemas conceptuales expresados a través de diversos medios de interacción y representación (en papel o computadora), tales como los enlistados arriba, pero incluyendo también el lenguaje hablado o metáforas. Dichos sistemas conceptuales sirven para construir, describir, explicar, manipular o predecir los sistemas que están siendo modelados (ver Figura 8 más abajo). Lesh y Harel (2003) añaden que los modelos matemáticos son distintos de otros tipos de modelos porque se centran en características estructurales de los sistemas que describen, más que en características físicas, biológicas o artísticas. Un modelo matemático involucra propósitos, sistemas conceptuales inherentes y medios de expresión para los sistemas conceptuales incluye tanto:

> (a) un sistema conceptual para describir o explicar los objetos matemáticos pertinentes, relaciones, acciones, patrones y regularidades que son atribuidos a la situación de resolución de problemas; y (b) los procedimientos de acompañamiento para generar construcciones útiles, manipulaciones o predicciones para el logro de objetivos claramente reconocidos. (Lesh y Harel, 2003, p. 159)

Arnold Cathalifaud y Osorio (1998) definen a un sistema conceptual como una construcción simbólica (en la música, la lógica, las matemáticas, etc.) que describe el comportamiento de un fenómeno. También se puede entender modelo como un conjunto de reglas o leyes que representan de forma precisa aquel objeto o fenómeno en la mente del observador. Cuando aquellas reglas o leyes son de naturaleza matemática, se dice que se ha desarrollado un modelo matemático. Así, un modelo puede ser constituido por ecuaciones algebraicas que expresan parámetros, o leyes físicas, para representar el funcionamiento o comportamiento (simplificado) de un sistema o un fenómeno físico.

Lesh y Lehrer (2003) enfatizan que las propiedades principales de un sistema conceptual se dan al considerarlos como un todo, y no son derivadas de sus elementos constitutivos aislados. Por ejemplo, en un sistema conceptual (modelo) de un tornado, los elementos constitutivos serían los conceptos de fuerza, velocidad, etc.; sin embargo, estos elementos aislados no explican de forma separada el fenómeno del tornado, sino las interacciones entre ellos.

Existen diversos tipos de modelos matemáticos. En particular, Burkhardt (1981) y Sekerák (2010) dan cada uno su propia clasificación. Burkhardt (1981) considera los siguientes tipos de modelos matemáticos: los estándar, que describen situaciones de interés general ampliamente abordadas en los cursos escolares y los relacionados con nuevas situaciones, las cuales no han sido analizadas antes de forma explícita.

Por su parte, Sekerák (2010) considera los componentes matemáticos y los diversos tipos de representaciones para clasificar los modelos en: *aritmético*, que usa tablas de operación, parejas ordenadas, vectores, etc.); *algebraico-analítico*, constituido por ecuaciones, desigualdades o sistemas de ecuaciones; gráfico, representado por figuras geométricas; y combinado, que integra algunos de los anteriores elementos. Este último autor también considera los siguientes componentes como inherentes a la modelación matemática:

1. Enfocarse en los puntos iniciales para construir el modelo de una situación o un problema
2. Estructurar los problemas o situaciones que deben ser modelados
3. Matematización: el proceso de transferir la realidad a una estructura matemática
4. Producir un modelo matemático apropiado
5. Probar el modelo desde la perspectiva de la situación real
6. Pensar, analizar y presentar el modelo, incluyendo sus adecuaciones o limitaciones
7. De matematización: interpretar el modelo respecto a la realidad
8. Rastrear y controlar el proceso de modelado

El proceso de matematización se da cuando se enuncia la estructura matemática. Las estructuras matemáticas básicas pueden incluir, como ya se mencionó, gráficas, ecuaciones, fórmulas, sistemas de ecuaciones, desigualdades, tablas numéricas, algoritmos, etc. Sin embargo, la estructura matemática es solamente una parte del modelo; hay otras muchas etapas que también forman parte del proceso de modelado, tales como analizar las limitaciones y adecuaciones del mismo, interpretarlo en el contexto de la realidad, y rastrear y controlar el mismo proceso de la modelación (Sekerák, 2010).

Modelos, modelaje, simulación y modelación computacional en ingeniería

En la literatura ingenieril, Jay (1984) da dos definiciones de modelo: "(1) Una representación matemática o física de las relaciones de un sistema. (2) (software). Una representación de un proceso, dispositivo o concepto del mundo real." (p. 552). Para un modelo matemático, se encuentran las siguientes definiciones: Ogata (1987) dice que un modelo "es la descripción matemática de las características dinámicas de un sistema [d]onde sistema es una combinación de componentes que actúan para alcanzar un objetivo específico" (p 14). Por otro lado, el *IEEE Standard Glossary of Modeling and Simulation Terminology* define modelo matemático en el contexto de la modelación y simulación como un "modelo simbólico cuyas propiedades son expresadas en símbolos y relaciones matemáticas (IEEE, 1989; p. 12).

Como puede observarse en estas definiciones, tres coinciden en que los modelos son representaciones matemáticas de un sistema, mientras que la última definición, la de IEEE (1989), habla de propiedades (posiblemente de un sistema) expresadas a través de símbolos y relaciones matemáticas (ecuaciones del modelo). También es importante mencionar que la definición de Jay (1984) que se refiere al software no habla de ecuaciones, sino de representaciones, que podríamos interpretar también como aquellas representaciones en forma de código.

Por otro lado, cabe señalar que en ingeniería se usa el término *modelado* para el concepto en inglés de *modeling*, a diferencia de los campos de las matemáticas o de la educación matemática, donde este término se traduce como modelación (o modelización). Además, en ingeniería, el modelado suele siempre ir de la mano del concepto de simulación (ver más abajo). Jay (1984) define modelado como una "técnica de diseño y análisis de sistemas utilizando idealizaciones matemáticas o físicas de un sistema o una porción de éste" (p. 552), agregando que "la integridad y realismo del modelo dependerán de las preguntas que sean respondidas y el estado de conocimiento del sistema y su entorno" (p. 552). Por su parte, Ogata (1987) señala que "el modelado es la elaboración de modelos" (p.16), siendo los modelos matemáticos los que se desarrollan aplicando leyes físicas, o procedimientos de modelado experimental, a un sistema para describirlo. Explica también que el modelado experimental consiste "en someter al sistema a un conjunto de entradas conocidas para medir sus salidas y, a partir de la relación de entrada-salida, definir entonces el modelo matemático" (Ogata, 1987; p. 16). La definición de Ogata (1987) muestra una relación directa con la modelación matemática de sistemas con énfasis en un método experimental.

Así, tanto la definición general de modelación como la de modelado hacen alusión al proceso de construir modelos matemáticos. En ingeniería se construyen y validan modelos matemáticos de sistemas mediante la construcción de simulaciones, sobre todo computacionales –estrechamente ligadas a la modelación computacional–, utilizando una gran variedad de entornos digitales.

Dodge (2008) define *simulación* como "un método para analizar, diseñar y operar sistemas complejos [lo que] implica el diseño de un modelo de un sistema y la realización de experimentos sobre él a medida que se avanza" (p. 498). Entonces, simular tiene que ver con experimentar para poder analizar, diseñar y operar sistemas, con el fin de obtener la mejor simulación (o representación) del sistema a modelar, la cuál generalmente es computacional. En la mayoría de los contextos o ámbitos en ingeniería se define *simular* como "representar el funcionamiento de un sistema por otro"; por ejemplo, representar un sistema físico usando un programa computacional o "representar un sistema biológico por un modelo matemático" (Jay, 1984, p. 841). De manera análoga, ese autor define *simulación* en diferentes contextos como la representación de características seleccionadas de la conducta de un sistema abstracto o físico, real o propuesto; por ejemplo *i*) por medio de operaciones realizadas por un sistema computacional (en el contexto de software); *ii*) usando "un modelo de un sistema físico en el cual los elementos de cómputo son usados para representar alguno pero no todos los subsistemas" (en el contexto de la física); o *iii*) usando "un modelo de ecuaciones matemáticas generalmente resuelto por computadora" (en el contexto matemático) (Jay, 1984; p. 841). Así, para construir una simulación se requiere de un medio o instrumento que proporcione las herramientas o elementos necesarios para realizarla. Se observa que todas las definiciones anteriores incluyen a la computadora como elemento principal para llevar a cabo la simulación de un modelo.

Relacionado con lo anterior, en ingeniería también se utiliza el término *simulador* para referirse a un dispositivo o programa computacional que se utiliza *i*) para representar ciertas características de la conducta de un sistema físico o abstracto, o *ii*) para probar, medir y diagnosticar un equipo que simula un sistema o condición deseada "a través del suministro de las entradas y salidas apropiadas" para ese equipo (Jay, 1984, pp. 841-842).

La modelación o modelado no puede entenderse si no va de la mano del uso de la simulación (computacional), como medio para analizar y refinar los modelos. Una simulación computacional de un modelo es definida por Ifenthaler (2012) como "un programa informático o algoritmo que simula cambios de un sistema modelado en respuesta a señales de entrada" (p. 710). En una simulación computacional se puede experimentar manipulando las variables o parámetros (insertando diferentes valores) del modelo simulado, y en una modelación computacional se puede, además, reprogramar el modelo, modificando el comportamiento y relaciones de las variables y parámetros. La diferencia entre simulación computacional y modelación computacional es abordada por Araujo et al. (2007), quienes afirman que "estos dos tipos de actividades se distinguen por el acceso que [se] tiene al modelo matemático [...] subyacente a la implementación de la actividad" (p. 504). Otra descripción que explica estas diferencias dice:

> En una simulación computacional que representa un modelo físico, [se] puede insertar valores iniciales para variables, alterar parámetros y, de forma limitada, modificar las relaciones entre las variables; pero no tiene autonomía para modificar la estructura de la simulación (modelo matemático o icónico pre-especificado); o sea, acceso a los elementos más básicos que la constituyen. La interacción del [usuario] con la simulación tiene un carácter eminentemente exploratorio; mientras que en la modelación computacional [se] tiene acceso a los primitivos que constituyen el modelo computacional, pudiendo construirlos desde el principio y reconstruirlos conforme desee. (López et al., 2011, p. 205)

Ante esto, se puede decir que la simulación computacional presenta un carácter exploratorio de la modelación, mientras que la modelación computacional tiene un carácter expresivo. En conclusión, hay

> dos modos básicos de usar las actividades de modelación computacional: el modo exploratorio y el modo expresivo. Las actividades exploratorias son caracterizadas por la observación, análisis e interacción del sujeto con modelos

> computacionales ya construidos, en el intento de permitir al alumno la percepción y la comprensión de las eventuales relaciones entre la matemática subyacente al modelo y el fenómeno físico en cuestión. En este tipo de actividad, el alumno tiene acceso a la estructura básica del modelo implementado, pudiendo modificarlo si desea. Las actividades de modelación computacional de tipo expresivo se caracterizan por el proceso de construcción del modelo desde su estructura matemática hasta el análisis de los resultados generados por él. El alumno puede interactuar totalmente con su modelo, pudiendo reconstruirlo tantas veces como le parezca necesario para la producción de resultados que le sean satisfactorios (Araujo, et al., 2011, p. 205-206, citando a Bliss & Ogborn, 1989).

La modelación computacional expresiva[4] es ampliamente practicada en la formación de ingenieros y en la ingeniería en general, debido a que constituye un paso previo para la implementación de los productos, procesos o sistemas, donde estudiantes de ingeniería e ingenieros pueden experimentar con los modelos de sistemas sin ningún riesgo para ellos ni para el sistema mismo.

Modelación para la enseñanza y aprendizaje (matemáticos)

Más allá de solamente el ámbito de la ingeniería, la creación de modelos propios puede ser una herramienta de aprendizaje poderosa para ayudar a tener una mejor comprensión del mundo que nos rodea, ya que la modelación es un proceso de investigación para comprender un sistema y, en ocasiones, resolver algún problema, ya que, como se mencionó en la sección anterior, tiene propiedades exploratorias y expresivas. El valor para los estudiantes de esta cuestión es explicado por Doerr (1995), quien retoma algunos conceptos desarrollados por Bliss y colegas (Bliss & Ogborn, 1989; y Bliss et al., 1992):

> Modelos exploratorios [o modelación exploratoria] son aquellos modelos que son construidos por expertos para representar saberes o conocimientos en algún dominio de contenido[5]. Los estudiantes típicamente exploran las consecuencias de sus acciones dentro de los límites de estos modelos de dominio de contenido. Estos modelos son en esencia micromundos que proporcionan al estudiante un conjunto de mundos simulados e idealizados que encarnan, por ejemplo, las leyes newtonianas del movimiento, permitiendo al estudiante explorar las consecuencias de los cambios en los parámetros de la simulación. […]. Estos modelos exploratorios proporcionan una manera de preguntarse si los estudiantes pueden entender la manera de pensar de un experto sobre un problema.
>
> La construcción de modelos (o modelación expresiva), por otro lado, proporciona a los estudiantes la oportunidad de expresar sus propios conceptos y aprender a través del proceso de representación de sus conceptos, definiendo relaciones y explorando las consecuencias de esas relaciones […] Estos modelos expresivos

[4] Lo que en el contexto de la ingeniería se refiere a programar simulaciones computacionales.

[5] En un contexto computacional pueden ser llamados simulaciones.

> [o modelación expresiva] proporcionan una manera de preguntarse si los estudiantes pueden entender su propia manera de pensar sobre un problema. Este es un cambio importante en la perspectiva de la actividad de explorar un modelo pre-construido, que necesariamente encarna los conceptos y estructuras de un experto. (Doerr, 1995, pp. 3-4)

De hecho, la modelación matemática involucra, de manera importante, el uso de diferentes estrategias para la resolución de problemas, que a su vez involucran razonamientos (Schoenfeld, 1982). Lesh y Lehrer (2003) señalan que las actividades de modelación en el ámbito escolar pueden ayudar a los estudiantes a aprender a cuantificar, dimensionar, coordinar y matematizar sus experiencias. Estos autores consideran que el punto clave es enfocarse de manera profunda en un pequeño número de grandes ideas e incrementar la probabilidad de que los estudiantes desarrollen construcciones poderosas y sistemas conceptuales; al mismo tiempo, asegurarse que irán más allá de pensar con estos sistemas para también pensar acerca de ellos. En este sentido se reconoce la necesidad de desarrollar situaciones que sean significativas para los estudiantes (ver la sección "*Actividades inducidoras de modelación*"), en el mismo sentido que las matemáticas puras son significativas para los matemáticos.

Blum y Niss (1989) afirman que la modelación matemática de situaciones reales es ampliamente recomendada por su potencial para hacer que las matemáticas sean significativas para los estudiantes. Dunne (1998) también afirma que la modelación matemática puede y debe ser usada con el objetivo de hacer conscientes a los estudiantes del significado real de las matemáticas, estudiarlas en un contexto real, eliminar la mística del álgebra, implementar tecnología y ayudarles estudiantes a construir su propio conocimiento.

Ciclos de modelación matemática

Por lo general, el proceso de desarrollar modelos que sean lo suficientemente útiles para un propósito u objetivo específico implica una serie de ciclos de prueba y revisión iterativas, donde el modelo es refinado o adaptado. Si bien todo lo que existe puede ser modelado, y aunque en algunas ocasiones no se requiere de ciclos de refinamiento, muchos de los problemas o sistemas que se pretenden modelar en la realidad, tanto en ingeniería como en otras disciplinas, son complejos y requieren modelarse de manera cíclica. A continuación presentamos diferentes descripciones de los ciclos de modelación de la literatura en general y en educación matemática.

Definición general de ciclo de modelación

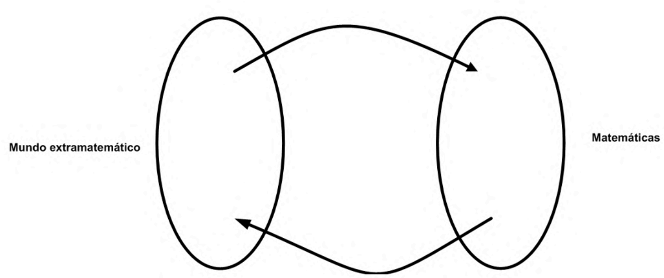
Para explicar de manera general en qué consiste un ciclo de modelación, nos remitimos a Niss et al. (2007), quienes describen las construcciones de modelos matemáticos como interacciones de forma cíclica, entre el mundo real (extra-matemático) y el "mundo" o dominio matemático:

> El mundo extra-matemático puede ser otro tema o disciplina, un área de práctica, una esfera de la vida privada o social, etc. […] El mundo extra-matemático es entonces una manera útil de indicar aquella parte del "mundo real" más amplio que es relevante para un problema o asunto particular.
>
> […]
>
> En [un dominio matemático] M se realizan deliberaciones, manipulaciones e inferencias matemáticas, cuyos resultados son traducidos de nuevo a un [dominio de interés extra-matemático] D, e interpretados como conclusiones referentes a ese dominio. Este ciclo de modelación puede ser iterado varias veces, sobre la base de la validación y evaluación del modelo en relación con el dominio, hasta que las conclusiones resultantes relativas a D sean satisfactorias en relación con el propósito de la construcción del modelo. (Niss et al., 2007, p. 4)

Esta descripción se complementa con la Figura 2, que muestra la interacción o mapeo cíclico que se da entre D y M durante el proceso de construcción de un modelo o ciclo de modelación.

Figura 2

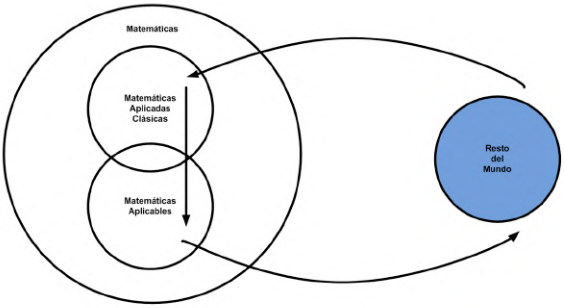
Las matemáticas y el resto del mundo, según Niss et al. (2007)



Ciclo de modelación de Pollak

El ciclo de Pollak (1979) (Figura 3) fue de los primeros que se presentaron dentro del estudio formal de los procesos de modelación. Muestra cómo el uso de las matemáticas permite la construcción de un modelo de algo que existe en el mundo real. Presenta un mapeo simplificado entre lo que Pollak llama el "resto del mundo" –el mundo real, o lo que Niss et al. (2007) llaman dominio extra-matemático– y el dominio de las matemáticas, que Pollak divide en dos tipos: matemáticas aplicadas clásicas y matemáticas aplicables. El dominio del resto del mundo representa los problemas o fenómenos existentes en el mundo real, modelados para obtener un producto matemático (el modelo) que sea susceptible de análisis o permita dar respuesta al problema.

Figura 3
Ciclo de modelación de Pollak (1979)

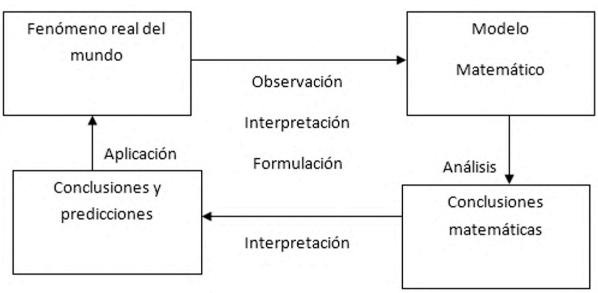


Ciclo de modelación del NCTM

El NCTM (2000) propone cuatro etapas en el proceso de modelación matemática (Figura 4):

1. La observación del fenómeno: delinear la situación del problema y definir las variables o parámetros que lo afectan.
2. Establecer conjeturas acerca de las relaciones entre los diversos factores e interpretar estas relaciones de forma matemática para así formular un modelo matemático.
3. Aplicar al modelo un análisis para establecer conclusiones.
4. Interpretar las conclusiones matemáticas para obtener resultados y reinterpretarlos en el contexto del fenómeno de estudio.

Figura 4
Etapas del proceso de modelación matemática (NCTM, 2000, p. 3)

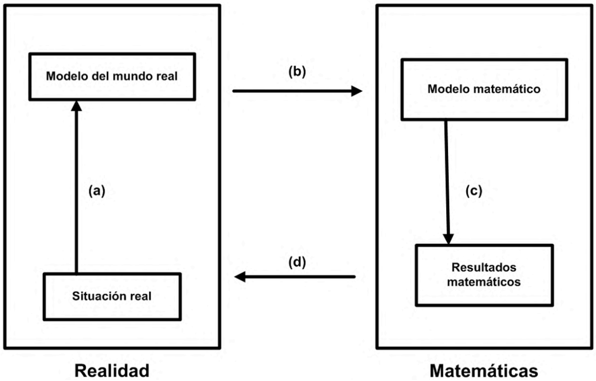


Ciclos de modelación de Blum y de Maaß

El ciclo de modelación de Blum (1996) (Figura 5) plantea que una situación del mundo real es *a*) idealizada (simplificada) para obtener un modelo de ella. A partir de allí, el modelo del mundo real ya es *b*) matemático. Durante el proceso de creación del modelo matemático, se tienen que tomar en cuenta algunas consideraciones, las cuales producen ciertos *c*) resultados matemáticos que deben ser reinterpretados en *d*) la situación real. Con este último paso se reinicia el ciclo y la adecuación de resultados debe ser validada para verificar si la solución a la problemática planteada es satisfactoria o no. Si sucede lo segundo, el proceso o ciclo debe comenzar una nueva iteración

Figura 5

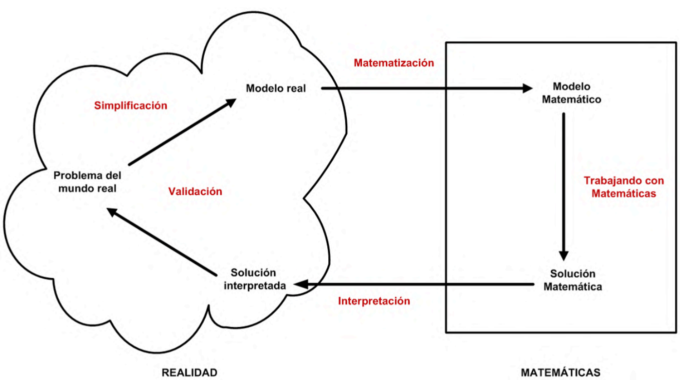
Ciclo de modelación de Blum (1996, p. 18)



El ciclo de modelación de Maaß (2006) (Figura 6) se basa en el de Blum (1996). Intenta mostrar de manera más clara y estructurada la relación que existe entre el mundo real y las matemáticas durante el proceso de modelación (matemática), descomponiendo cada parte en sus distintas fases o pasos.

Figura 6

Proceso de modelación según Maaß (2006, basándose en Blum 1996)



En este ciclo, la secuencia de pasos es:

- Se plantea un problema del mundo real.

- Se simplifica este modelo a través de una caracterización de sus variables (matematización).
- Se procede a encontrar soluciones del modelo, que deben ser interpretadas y validadas.
- De la interpretación y la validación se puede demostrar si el modelo es el adecuado.
- Si el modelo es el adecuado, se detiene el proceso.
- Si el modelo no es el adecuado, se debe trabajar nuevamente en los pasos anteriores.

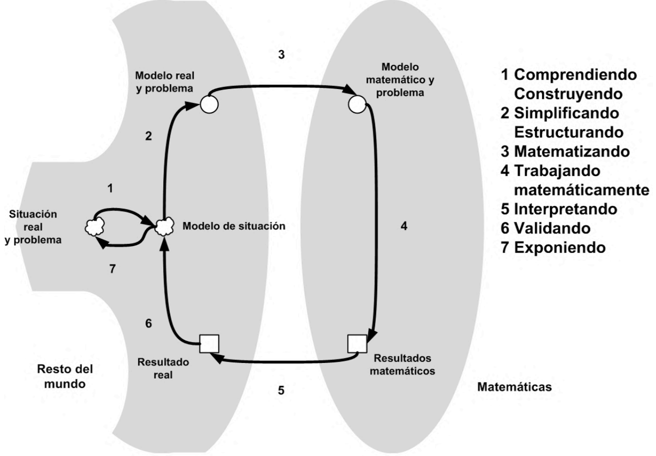
Para Maaß (2006), este proceso "debe ser visto como un esquema simplificado, y no como un algoritmo que tenemos que seguir de manera lineal" (p. 115). Pero, lo que podemos observar de este ciclo (o proceso) de modelación es que, al igual que en los casos de otros autores, si la solución o el proceso elegido no son los adecuados, entonces el proceso de modelación (o algunos pasos) tendrán que ser trabajados de nuevo (iterado).

Ciclo de modelación de Blum y Leiss

El ciclo de modelación de Blum y Leiss (2007) (Figura 7) tiene como característica principal la incorporación explícita del modelo de situación, que se puede entender como "la representación mental de la situación real que construyen [los estudiantes o individuos] después de haber leído un problema escrito" (Borromeo Ferri, 2006, p. 87). Al igual que en los ciclos de modelación de Pollak y de Maaß, existe una diferenciación entre lo real y lo matemático, con la característica de que la parte real incluye los modelos abstractos y mentales que se necesitan para llegar a la parte matemática del ciclo de modelación.

Figura 7

El ciclo de modelación de Blum y Leiss (2007)



De manera general, este ciclo se divide en los siguientes etapas o fases:

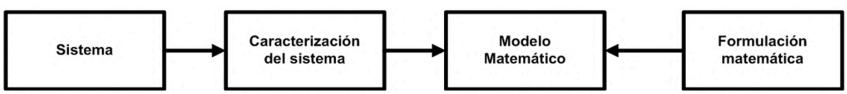
- Comprensión de la situación o problema real y construcción de su representación mental.
- Simplificación del problema real para estructurarlo como un modelo real.
- Matematización del modelo real para convertirlo en un modelo matemático.
- Búsqueda de una solución a partir del trabajo matemático que se realiza con el modelo.
- Interpretación de la solución del modelo matemático.
- Validación de la solución matemática, interpretándola en el contexto de la situación o problema real.

Ciclos de modelación de Murphy y Rodin

El ciclo de modelación de Murphy y Rodin (1987) se basa en enfoques de varias disciplinas, como ciencia y tecnología, ciencias administrativas, ciencias biológicas y matemáticas aplicadas e ingeniería. Estos autores plantean una serie de diagramas o esquemas para explicar las etapas que sigue su ciclo, comenzando por el esquema de la Figura 8, que representa la relación que existe entre un sistema y su modelo matemático.

Figura 8

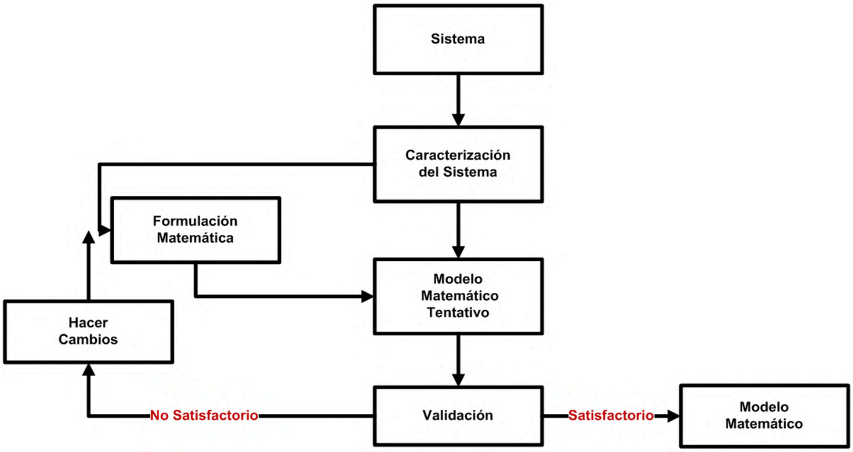
Relación entre un sistema y su modelo matemático (Murphy y Rodin, 1987; p. 18)



En esta relación hay dos conceptos principales: caracterización y formulación. Murphy y Rodin (1987) explican que "una caracterización de un sistema es un modelo descriptivo del sistema [donde la] descripción se hace en términos de variables y relaciones entre variables" (p. 17). Añaden que "la formulación abstracta, que involucra símbolos, no tiene sentido fuera de las matemáticas" y que por sí misma no es un modelo, sino que lo es "relacionando los símbolos de la formulación con variables y relaciones de la caracterización del sistema de una manera satisfactoria que la formulación abstracta se convierte en un modelo matemático" (Murphy y Rodin, 1987; p. 18). Así, para estos autores, el desarrollo de un modelo matemático de un sistema involucra tres etapas: 1) llevar a cabo una caracterización del sistema, 2) elegir una formulación matemática y 3) relacionar la caracterización del sistema con la formulación matemática (Figura 8).

En la práctica, la construcción de un modelo es un proceso recursivo que requiere de varias iteraciones para poder refinarlo y ponerlo en práctica. Por ello, Murphy y Rodin (1987) complementan el esquema anterior con un esquema simplificado (Figura 9) de un ciclo de modelación. Este comienza con una primera caracterización del sistema y una formulación matemática que probablemente no sean las adecuadas. Como resultado de esa primera interacción (caracterización–formulación) se genera, casi siempre, un modelo matemático tentativo (aún inadecuado). A través de un proceso iterativo se hacen cambios pertinentes en la caracterización y formulación del modelo tentativo para llegar a uno adecuado del sistema, que ya constituye el modelo matemático. En este proceso, Murphy y Rodin (1987) enfatizan que es necesario definir muy bien los criterios de validación del modelo: entre más estricto sean, más complejo y adecuado será el modelo matemático resultante.

Figura 9
El ciclo modelación matemático (simplificado) de Murphy y Rodin (1987; p. 18)

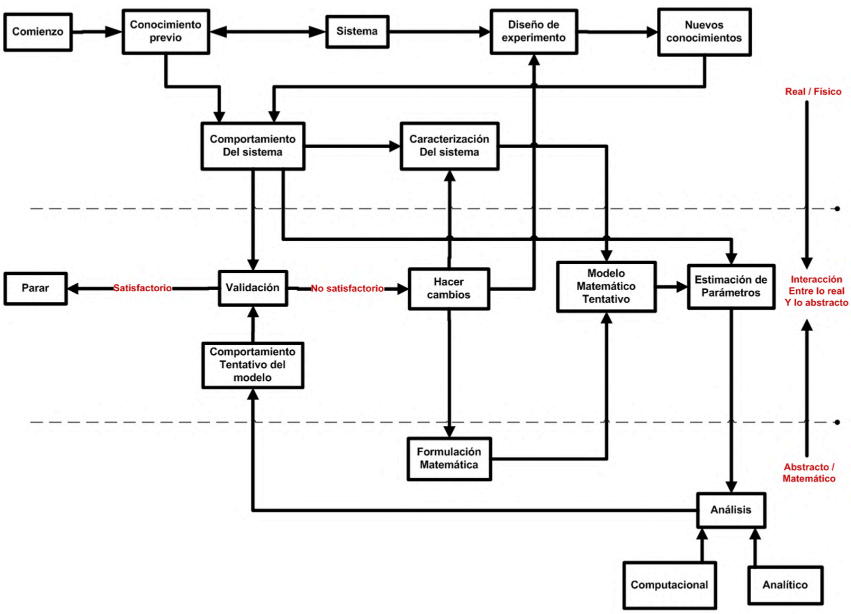


Murphy y Rodin (1987) proponen otro ciclo de modelación más detallado (Figura 10) para representar mejor lo que sucede en la práctica, y al que llaman proceso de construcción detallado. Este se caracteriza por separar claramente el mundo “físico” del sistema, y el mundo “abstracto” de la formulación matemática, así como la interacción entre ambos. Esto también sucede, aunque de manera menos explícita, en los ciclos de Pollak (1979), de Maaß (2006) y de Blum y Leiss (2007).

Otra característica en este último es que en la etapa del mundo físico (real) se toman en cuenta los conocimientos previos del estudiante para definir y caracterizar el comportamiento del sistema, así como la idea de que, a partir del diseño y la ejecución de experimentos, se puede generar nuevo conocimiento que puede ser utilizado en las siguientes iteraciones del ciclo para mejorar el modelo tentativo. En la etapa de interacción entre lo "real y lo abstracto" se realiza la validación (evaluación) del modelo tentativo y se define si se continua con las iteraciones. En la etapa del mundo matemático (abstracto) se lleva la formulación matemática y el análisis (que puede ser computacional o analítico); la primera incide directamente en la generación del modelo matemático tentativo, mientras que el segundo ayuda a observar el comportamiento tentativo del modelo, lo que favorece una mejor evaluación de los modelos.

Figura 10

Ciclo de modelación detallado de Murphy y Rodin (1987; p. 19)

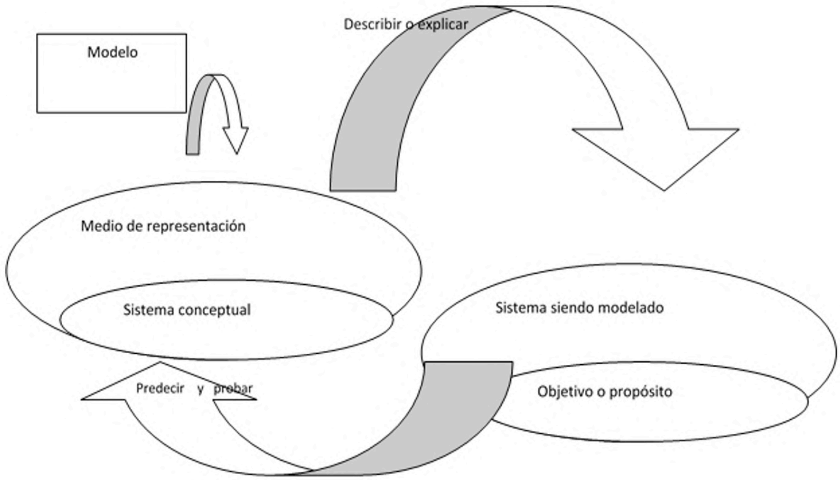


Ciclo de modelación de Lesh y Lehrer

Lesh y Harel (2003) consideran que el desarrollo de modelos generalmente ocurre a través de una serie de procesos: desarrollo-prueba-revisión de ciclos. Cada etapa involucra diferentes rutas de pensamiento acerca de la naturaleza de los objetos o hechos, de las relaciones, operaciones y patrones involucrados en la solución del problema, así como de los objetivos y posibles pasos a seguir.

En su esquema (Figura 11), la creación de un modelo atiende a un ciclo de refinamiento donde, primeramente, el modelo debe constituir un medio de representación adecuado en un sistema conceptual, que permita describir y explicar el sistema que se está modelando y que atienda a sus objetivos y propósitos. Una vez logrado eso, se prueba y revisan sus capacidades de predicción para comenzar nuevamente el ciclo.

Figura 11
El ciclo de modelación de Lesh y Lehrer (2003, p. 112)



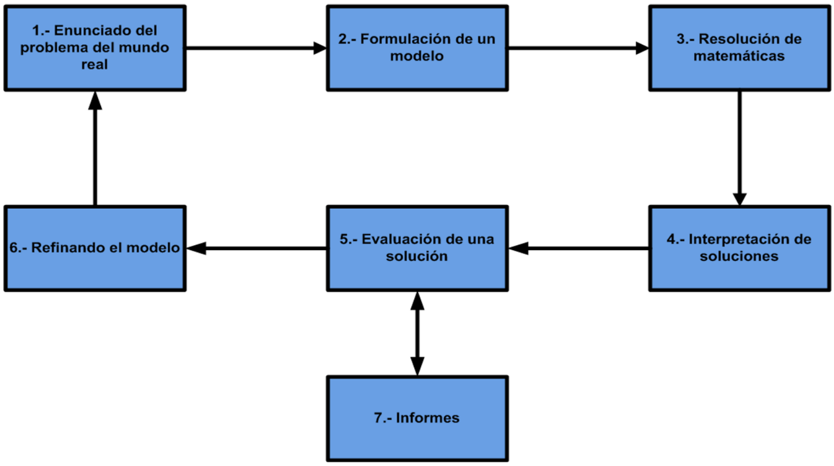
Lesh y Lehrer (2003) agregan que pueden surgir propiedades en niveles más altos de abstracción como producto de interacciones en niveles más primitivos, y que estas reorganizaciones conceptuales ocurren principalmente cuando los modelos tienen fallas en ajustarse a las experiencias. Es decir, si las descripciones, explicaciones o predicciones de los modelos no se ajustan a las experiencias de la realidad, se requiere una reorganización conceptual. Dicha reorganización ocurre en una gran variedad de dimensiones: concreta-abstracta, situada-descontextualizada, y específica-general (Lesh y Lehrer, 2003).

Ciclo de modelación de Berry y Davies

El ciclo de modelación de Berry y Davies (1996) (Figura 12) presenta la naturaleza cíclica del proceso que los estudiantes siguen al construir un modelo, desde que se les presenta un enunciado "tradicional" hasta que realizan un informe o reporte de sus resultados. Las etapas que conforman este ciclo de modelación comienzan con la lectura del enunciado del problema, la formulación de un modelo matemático, el proceso de resolución matemática, la interpretación y validación de la solución y una fase de refinamiento del modelo generado. Se muestra la etapa de refinamiento del modelo, paso previo al reinicio del ciclo. La idea es que el proceso de refinamiento favorezca y enriquezca el trabajo realizado en cada una de las etapas, hasta evaluar si el modelo resuelve las necesidades planteadas por el problema. Al cumplirse lo anterior, el ciclo finaliza y comienza la última fase: la del reporte de resultados (informe).

Figura 12

Ciclo de modelación de Barrie Berry y Davies (1996)



Ciclos de modelación de Galbraith y de Geiger

Los ciclos de Galbraith et al. (2003) y de Geiger (2011) presentan interacciones de la modelación y aprendizaje matemáticos con la tecnología.

En el esquema de Galbraith et al. (2003) (Figura 13), los contextos de aprendizaje matemático afectan los procesos de modelación matemática (problema, suposiciones, formulaciones, resoluciones, interpretaciones y evaluaciones), los cuales están en interacción con la tecnología en la aplicación de las matemáticas (el modelo), así como en otros procesos y rutinas matemáticos:

> al trabajar con modelos y aplicaciones, estos procesos y rutinas se importarán frecuentemente como herramientas para mejorar los procesos de solución. Las cabezas dobles en las flechas indican, recíprocamente, que los conocimientos matemáticos adquiridos durante la actividad de modelado se integrarán en el almacén de conocimiento para su uso potencial en otras actividades matemáticas; y que al igual que la tecnología puede afectar al procesamiento matemático dentro y fuera de la actividad de modelación el aprendizaje conseguido puede proporcionar percepciones adicionales para influir en cómo se utiliza la tecnología. (Galbraith et al., 2003; p. 113)

El esquema de Geiger (2011) (Figura 14) adapta el modelo de Galbraith et al. (2013), involucrando el uso de la tecnología en cada una de las fases del ciclo de modelación (lo mete dentro del ovalo del diagrama), describiéndolo como un proceso de modelación más recursivo. El ciclo comienza con la especificación de un problema para después entrar a fases de suposiciones y formulaciones, que llevan a resolver, y posteriormente interpretar, el modelo; por último, se genera un informe de la evaluación (pruebas) del modelo. Para Geiger (2011), la tecnología ayuda a los estudiantes a enfrentarse a la resolución de problemas complejos planteados en un contexto de aprendizaje matemático, interactuando con diversos procesos matemáticos.

Figura 13

Algunas interrelaciones matemáticas y tecnológicas según Galbraith et al. (2013)

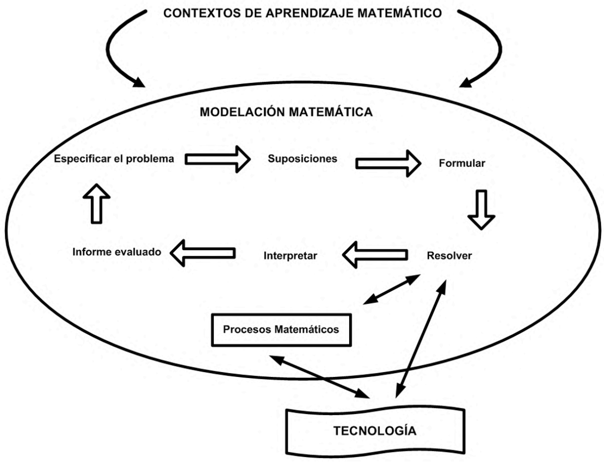
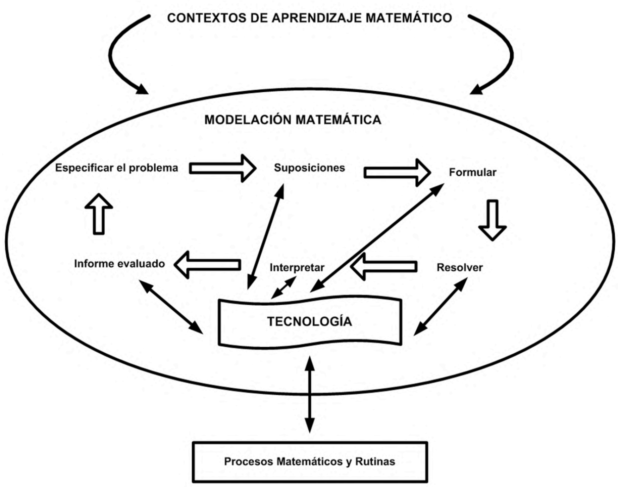


Figura 14

Ciclo de modelación de Geiger (2011)

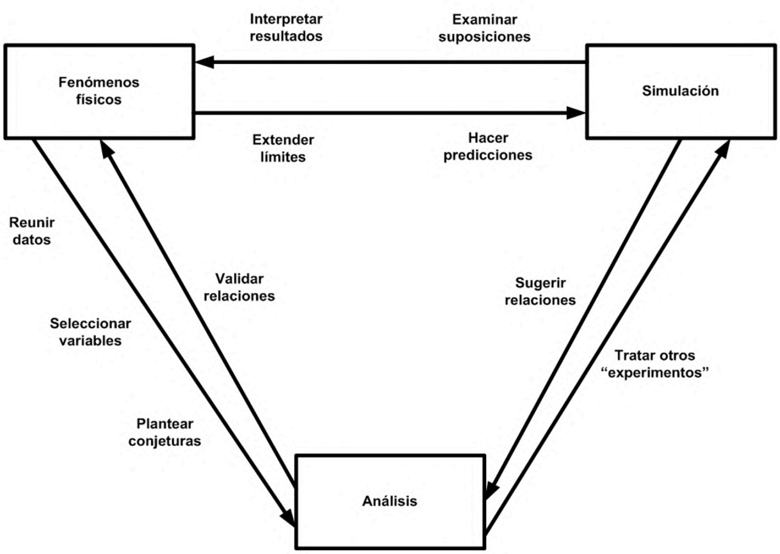


Ciclo de modelación de Doerr

El ciclo de modelación de Doerr (1995) (Figura 15) se caracteriza por presentar un proceso iterativo de construcción de modelos donde intervienen tres componentes principales: la experimentación con fenómenos físicos, la exploración de posibles alternativas a través de un entorno de simulación, y el desarrollo de una solución con una herramienta de análisis multi-representacional. Adicional a la característica de los tres componentes, existen interacciones iterativas entre los componentes del ciclo, ya que la solución al problema planteado se va refinando en "subciclos" entre componentes. El ciclo comienza con un experimento donde los estudiantes deben hacer explícitas sus representaciones (matemáticas u otras) de un fenómeno físico; después, se identifican y eligen sus variables y las relaciones entre ellas. Luego, se utiliza un entorno digital de simulación para apoyar la exploración de posibles soluciones (modelos) mediante múltiples representaciones. Los modelos obtenidos se van refinando en un proceso iterativo a través del análisis, evaluación y reflexión de los estudiantes. Doerr explica que este proceso de iteración no es necesariamente lineal, sino que se debe dedicar tiempo en cada una de las etapas, yendo y viniendo entre ellas, mientras se desarrolla su entendimiento. Así, "un modelo no es una solución a un problema dado, sino más bien una herramienta de desarrollo que un estudiante puede usar y reutilizar para encontrar soluciones" (Doerr, 1995; p. 10).

Figura 15

Ciclo de modelación de Doerr (1995, p. 9)



Secuencia de modelación matemática en ingeniería

Finalmente, mencionamos el procedimiento o secuencia de pasos descrito por Ogata (1987) en su libro de texto para enseñanza de la ingeniería, el cual se puede considerar un ciclo de modelación matemática contextualizado a esa disciplina.

- Dibujar un diagrama esquemático del sistema y definir las variables.
- Utilizando leyes físicas, escribir ecuaciones para cada componente, combinándolos de acuerdo con el diagrama del sistema, y obtener un modelo matemático.
- Para verificar la validez del modelo, la predicción acerca del funcionamiento obtenida al resolver las ecuaciones del modelo, se compara con los resultados experimentales. (La pregunta sobre la validez de cualquier modelo matemático puede contestarse solamente mediante experimento).
- Si los resultados experimentales se alejan de la predicción en forma considerable, debe modificarse el modelo. Entonces, se obtiene un nuevo modelo y las nuevas predicciones se comparan con los resultados experimentales.
- El proceso se repite hasta que se obtiene una concordancia satisfactoria entre la predicción y los resultados experimentales.
(Ogata, 1987; pp. 4-5)

Actividades inducidoras de modelación

Para concluir esta revisión sobre modelación, presentamos brevemente la propuesta de Lesh y sus colegas acerca de utilizar la construcción de modelos como un camino para que los estudiantes se involucren en situaciones donde deban expresar, probar y revisar sus propias formas de pensamiento (Lesh & Lehrer, 2003). Más específicamente, Lesh et al. (2000) plantearon lo que en inglés se denomina *Model-Eliciting Activities* (MEAs), y que en español llamamos "actividades inducidoras de modelos".

Las MEAs son llamadas así porque son actividades didácticas que inducen, evocan, provocan, generan o favorecen la modelación. Como explican Lesh y Doerr (2003), se trata de proponer problemas abiertos (sin solución única) que hayan sido diseñados para retar a los estudiantes a construir modelos y resolver problemas complejos del mundo real. Los productos que los estudiantes producen van más allá de respuestas cortas a preguntas específicas, e implican el uso de herramientas conceptuales compartibles, manipulables, modificables y reutilizables para construir, describir, explicar, manipular, predecir o controlar sistemas matemáticamente significativos (Lesh & Doerr, 2003).

Garfield et al. (2009) enumeran las diferencias entre las MEAS de Lesh et. al. (2000) y las actividades de modelación tradicionales, donde se muestra que, en las MEAs, el enfoque está en el proceso en lugar de en el resultado (como en las tradicionales). Se trata de una diferencia significativa porque, al reflexionar sobre el proceso, se pueden generar una gran cantidad de conocimientos. Sin embargo, también es claro que las MEAs requieren mucha planeación y que son más efectivas si se realizan como un trabajo grupal. Lesh et al. (2000) consideran 6 principios básicos en el diseño de las

MEAs, los cuales sintetizamos con base en lo dicho tanto por Lesh y colegas como por Hamilton et al. (2008), autores que se enfocan a actividades en el contexto de la ingeniería.

1. *Principio de realidad*: Los problemas deben ser significativos y relevantes para los estudiantes, basados en situaciones, datos y soluciones reales (ej.. relacionadas con su vida cotidiana o ligeramente modificados).
2. *Principio de construcción del modelo:* La construcción debe involucrar explicaciones, manipulaciones, predicciones, etc. ¿Crea la tarea, la necesidad de que el modelo sea construido (o modificado, o extendido, o refinado)? ¿Se definen elementos y relaciones entre estos elementos?, ¿y operaciones con relación a cómo estos elementos interactúan? ¿Identifica patrones y reglas aplicables a las relaciones y operaciones?
3. *Principio de documentación del modelo*: Los estudiantes deben poder revelar la manera en que piensan con respecto a la problemática planteada y documentar su procedimiento en la creación de su modelo (datos y supuestos, metas, rutas de solución posibles). ¿En qué tipo de sistemas (objetos matemáticos, relaciones, operaciones, patrones, regularidades) están ellos pensando?
4. *Principio de autoevaluación*: Los estudiantes deben tener la habilidad de autoevaluar o medir sus propias soluciones, en términos de si son adecuadas y si cumplieron los propósitos, así como compararlas con alternativas.
5. *Principio de compatibilidad y reusabilidad (de generalización del modelo)*: El modelo no sólo debe ser para una situación específica, sino que debe ser generalizable, compartible (con otros) y reutilizable (en otras situaciones).
6. *Principio de prototipo:* El modelo debe proporcionar un prototipo de aprendizaje útil, que permita interpretar otros problemas con la misma estructura subyacente.

En términos generales, la metodología para que los estudiantes construyan modelos a partir de actividades inducidoras es muy ambiciosa. La construcción de modelos, tal como lo describen Lesh et al. (2000), es un proceso que requiere de una autorreflexión, a la vez de una discusión continua entre los miembros del grupo de trabajo.

A modo de conclusión

De esta manera concluimos el recorrido por las concepciones de modelación, sobre todo en los contextos de educación matemática e ingeniería. Mostramos diferentes definiciones y concepciones de cómo se entiende ese concepto y términos asociados, en general y en esos campos. Estas ilustran ciertas diferencias (en particular entre ingenieria y matemáticas) y matices que sirven para proporcionar una perspectiva más profunda de la idea de model(iz)ación. Para complementar esto, también se presentó cómo se plantea que un proceso de model(iz)ación suele requerir una serie de ciclos de prueba y revisión iterativas, tanto en ingeniería como en otras disciplinas; y se mostraron diferentes descripciones de los ciclos de modelación encontradas en la literatura en general y de la educación matemática. Esta travesía de cómo diferentes autores en diferentes contextos conciben los ciclos de model(iz)ación muestra la convergencia en la naturaleza cíclica de esta idea de model(iz)ación y de la evolución de las concepciones. También cómo esos ciclos pueden ser útiles en la educación, en particular para fomentar el aprendizaje de las matemáticas. Relacionado con este último punto, se termina el recorrido con una breve presentación de la idea de "actividades inducidoras de modelos", o MEAs de Lesh y sus colegas, como un método de aprendizaje de las matemáticas y las ciencias.

Como señalamos al principio del capítulo, se trata de una revisión que se hizo en el contexto de algunas de nuestras investigaciones, las cuales, en particular, se realizaron o analizaron de acuerdo a algunos principios de las MEAs (ver Olivera Villa, 2016; Pretelín Ricárdez, 2017). Siendo una perspectiva contextual, no es necesariamente exhaustiva y existen otras perspectivas sobre la model(iz)ación. Sin embargo, el recorrido da una visión de la evolución y diferentes concepciones de esa idea, lo que puede propiciar un diálogo sobre algunos de los rumbos que la investigación en model(iz)ación matemática puede seguir.

Agradecimientos

Este trabajo fue financiado por las becas CONACyT de Marco Antonio Olivera Villa (beca 230718) y de Ángel Pretelín Ricárdez (beca 342174).

Referencias

Ahmadi, S. (2011). Remarks on tornado dynamics. *Mathematical Sciences, 5*(2), 101–110. https://www.sid.ir/paper/322539/en

Ang, K. C. (2001). Teaching mathematical modelling in Singapore schools. *The Mathematics Educator, 6*(1), 63–75. http://hdl.handle.net/10497/49

Araujo, I.S., Veit, E.A. & M.A. Moreira (2007). Um estudo exploratôrio sobre as potencialidades do diagrama AVM na aprendizagem significativa de tópicos de Física. *Indivisa, Boletín de Estudios e Investigación,* (Monografía VIII), 503–514. https://doi.org/10.37382/indivisa.viMonografiaVIII.811

Aris, R. (1994). *Mathematical modelling techniques.* Dover.

Arnold Cathalifaud, M. & Osorio, F. (1998). Introducción a los Conceptos Básicos de la Teoría General de Sistemas. *Cinta de Moebio, 3*. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=10100306

Berry, J., & Davies, A. (1996). Written reports. En C.R. Haines, & S. Dunthorne (Eds.), *Mathematics Learning and Assessment: Sharing Innovative Practices* (pp. 3.3–3.11). Butterworth-Heinemann.

Bliss, J. & Ogborn, J. (1989). Tools for exploratory learning. *Journal of Computer Assisted Learning, 5*(1), 37–50. https://www.learntechlib.org/p/140881/

Bliss, J., Ogborn, J., Boohan, R, Briggs, J., Brosnan, T., Brough, D., Mellar, H., Miller, R., Nash, C., Rodgers, C., & Sakonidis, B. (1992). Reasoning supported by computational tools. *Computers in Education, 18*(1–3), 1–9. https://doi.org/10.1016/0360-1315(92)90030-9

Blum, W. (1996). Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht – Trends und Perspektiven. *Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, 23*, 15–38.

Blum, W., & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling* (pp. 222–231). Woodhead Publishing. https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221

Blum, W. et al. (2002). ICMI Study 14: Application and Modelling in Mathematics Education – Discussion Document. *Journal für Mathematik-Didaktik, 23*(3/4), 262–280.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects: State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational studies in mathematics, 22*(1), 37–68. https://doi.org/dbk7bx

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, *38*(2), 86–95. https://doi.org/db49k9

Burkhardt, H. (1981). *The Real World and Mathematics.* Blackie and Son.

Dodge, Y. (2008). *The Concise Encyclopedia of Statistics*. Springer. https://doi.org/d644zk

Doerr, H. M. (1995). An integrated approach to mathematical modeling: A classroom study. En *Annual Meeting of the American Educational Research Association 1995*. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED387349.pdf

Dunne, T. A. (1998). Mathematical modelling in years 8 to 12 of secondary schooling. En P. Galbraith, W. Blumm G. Booker, & I.D. Huntley (eds), *Mathematical modelling: teaching and assessment in a technology-rich world.* (pp. 29–37). Horwood. https://openlibrary.org/books/OL96165M/Mathematical_modelling

Epstein, J. M. (2008). Why Model? *Journal of Artificial Societies and Social Simulation 11*(4) 12. http://jasss.soc.surrey.ac.uk/11/4/12.html

Galbraith, P., Goos, M., Renshaw, P., & Geiger, V. (2003). Technology enriched classrooms: Some implications for teaching applications and modelling. En Qi-Xiao Ye, W. Blum, K. Houston, & Qi-Yuan, Jiang (eds.), *Mathematical modelling in education and culture: ICTMA 10* (pp. 111–125). Horwood.

Garfield, J., delMas R. & Zieffler, A. (2009). *What Are Model-Eliciting Activities? En Inventing and Testing Models: Using Model-Eliciting Activities.* Pedagogy in action, the SERC portal for educators. https://serc.carleton.edu/sp/library/mea/index.html

Geiger, V. (2011). Factors affecting teachers' adoption of innovative practices with technology and mathematical modelling. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (eds), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling. International perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling* (vol 1, pp. 305–314). Springer. https://doi.org/b39hvc

Gravemeijer, K.P.E. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education.* CD-ß Press / Freudenthal Institute.

Hamilton, E., Lesh, R., Lester, F., & Brilleslyper, M. (2008). Model-eliciting activities (MEAs) as a bridge between engineering education research and mathematics education research. *Advances in Engineering Education, 1*(2), 1–25. https://advances.asee.org/category/volume-01-issue-2-summer-2008/

Hestenes, D. (2010). Modeling theory for math and science education. En R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines, & A. Hurford (Eds.), *Modeling students' mathematical modeling competencies* (pp. 13–41). Springer. https://doi.org/dtpqtr

IEEE (1989). *IEEE Standard Glossary of Modeling and Simulation Terminology.* IEEE Std 610.3. https://doi.org/dssgk3

Ifenthaler, D. (2012). Computer Simulation Model. En N. Seel (Ed.), *Encyclopedia of the sciences of learning* (pp. 710–713). Springer. https://doi.org/fxw4g8

Jay, F. (Ed.). (1984). *IEEE Standard dictionary of electrical and electronics terms* (3a ed). IEEE

Lesh, R. & Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development. *Mathematical thinking and learning, 5*(2–3), 157–189. https://doi.org/bx5975

Lesh, R., & Lehrer, R. (2003). Models and modeling perspectives on the development of students and teachers. *Mathematical thinking and learning,* 5(2–3), 109–129. https://doi.org/ffxg5t

Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modelling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. En R. Lesh, & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism. Models and modelling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching* (pp. 3–33). Lawrence Erlbaum. https://doi.org/jr5k

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A. & Post, T. (2000). Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. En A. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 591–646). Lawrence Erlbaum. https://doi.org/n9sw

López, S., Veit, E., & Araujo, I. (2011). Modelación computacional apoyada en el uso del diagrama V de Gowin para el aprendizaje de conceptos de dinámica newtoniana. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias, 10*(1), 202–226. http://reec.uvigo.es/volumenes/volumen10/ART10_Vol10_N1.pdf

Maaß, K. (2006). What are modelling competences? *ZDM, 38*(2), 113–142. https://doi.org/ft8wgh

Minsky, M. (1965). Matter, minds and models. En W.A. Kanelich (Ed.), *Proceedings International Federation of Information Processing Congress* (Vol. 1, pp. 45–49). Spartan Books. https://groups.csail.mit.edu/medg/people/doyle/gallery/minsky/mmm.html

Murthy, D. N. P. & Rodin E. Y. (1987). A comparative evaluation of books on mathematical modelling. *Mathematical Modelling 9*(1), 17–28.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM. https://bit.ly/4ixHg6v

Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. (2007). Introduction. En W. Blum, P.L. Galbraith, HW. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (p. 3–32). Springer. https://doi.org/fhw2sn

Ogata, K. (1987). *Dinámica de sistemas* (G. López Portillo trad.). Prentice-Hall Hispanoaméricana.

Olivera Villa, M. A., & Sacristán Rock, A. I. (2014). Un sitio virtual para construir y compartir matemáticas. *Revista AMIUTEM, 2*(2), 53–63. https://revista.amiutem.edu.mx/ojs/relecamiutem/article/view/25/pdf_13

Olivera Villa, M. A. (2016). *Procesos de aprendizaje matemático en un laboratorio de experimentación y colaboración virtual* [Tesis doctoral, Cinvestav-IPN].

Pollak, H. (1979). The interaction between mathematics and other school subjects. En Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Cultura y la Ciencia (Ed.), *New trends in mathematics teaching IV,* (pp. 232–248). UNESCO. https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000124827

Pretelín-Ricárdez, A., & Sacristán, A. I. (2015). Videogame Construction by Engineering Students for Understanding Modelling Processes: The Case of Simulating Water Behaviour. *Informatics in Education, 14*(2), 265–277. https://doi.org/10.15388/infedu.2015.15

Pretelín Ricárdez, A. (2017). *Construcción de videojuegos para modelación matemática, por estudiantes de ingeniería* [Tesis doctoral, Cinvestav-IPN].

Real Academia Española (2023). *Diccionario de la lengua español*a (23.ª ed., versión 23.6 en línea). RAE. https://dle.rae.es

Sacristán, A. I., & Pretelín-Ricárdez, A. (2017). Gaining modelling and mathematical experience by constructing virtual sensory systems in maze-videogames. *Teaching Mathematics and Its Applications: An International Journal of the IMA, 36*(3), 151–166. https://doi.org/n9sx

Schoenfeld, A. (1982). Measures of Problem-Solving Performance and Problem-Solving Instruction. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*(1), 31–49. https://doi.org/10.2307/748435

Sekerák, J. (2010). Phases of mathematical modeling and competence of high school students. *The Teaching of Mathematics, 13*(2), 105–12. http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/tm/25/tm1323.pdf

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions: A Model of Goal and Theory Description en Mathematics Education: The Wiskobas Project*. Kluwer. https://doi.org/bp5wnp

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics, 54*(1), 9–35. https://doi.org/c63x9b